Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 4 –
Abgabe Dienstag, 29.4.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 13 (4 Punkte). Sei $H = L^2([0,1])$ mit der ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $e_k = e^{2\pi i k(\cdot)}$.

a) Sei $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\langle f \,|\, e_k\rangle$ und zeigen Sie damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

b) Sei $f \in H$ mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \,|\, e_k\rangle| < \infty$. Zeigen Sie: Es ist $f \in C([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und in $\big(C([0,1]), \|\ \|_\infty\big)$ gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, e_k\rangle e_k = f\,.$$

Aufgabe 14 (4 Punkte). Zeigen Sie:

a) Die Systeme $\big\{\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\cdot) \;\big|\; k \geq 1\big\}$ und $\big\{1, \sqrt{2}\cdot\cos(k\pi\cdot) \;\big|\; k \geq 1\big\}$ sind jeweils ONB von $L^2([0,1])$. (Hinweis: Vgl. Aufg. 10)

b) Für $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ ist

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\,\|f'\|_2\,.$$

Für welche solcher f gilt Gleichheit? (Hinweis: Parsevalgleichung)

Aufgabe 15 (4 Punkte). Zeigen Sie: $\mathcal{C}^1([a,b])$ mit der Norm $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ (vgl. Aufg. 1) ist separabel.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie (per Lemma von Zorn): Jedes ONS $S \subset H$ lässt sich zu einer ONB fortsetzen.

Lemma von Zorn. Ist $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine nichtleere Menge von Teilmengen, so enthält $\mathcal{M}$ eine maximale Kette $\mathcal{K}$. Dabei heißt $\mathcal{K}$

i) Kette, wenn für alle $A, B \in \mathcal{K}$ gilt $A \subset B$ oder $B \subset A$.

ii) maximale Kette, wenn gilt: Ist $\mathcal{K}' \subset \mathcal{M}$ Kette mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, so ist $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$.