Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 5 –

Abgabe Dienstag, 6.5.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 17 (4 Punkte). Sei E ein reeller, normierter VR, $M \subset E$ ein UVR und $\vartheta : M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.

a) Sei $x \in E \setminus M$, $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\eta : \mathbb{R} \cdot x \oplus M \to \mathbb{R},\ \lambda\, x + y \mapsto \lambda\mu + \vartheta(y)\ .$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

i) $\lambda\mu + \vartheta(y) \leq \|\vartheta\|\ \|\lambda\, x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in M$

ii) $-\|\vartheta\|\ \|-x + y\| + \vartheta(y) \leq \mu \leq \|\vartheta\|\ \|x + y\| - \vartheta(y)$ für alle $y \in M$

iii) $-\|\vartheta\|\ \|-x + y\| + \vartheta(y) \leq \|\vartheta\|\ \|x + z\| - \vartheta(z)$ für alle $y, z \in M$.

Zeigen Sie: Es existiert ein μ, so dass *i)* gilt und folgern Sie $\|\eta\| \leq \|\vartheta\|$.

*b) Folgern Sie mit dem Lemma von Zorn den Satz 3.1 (H-B) für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 18 (4 Punkte). Sei E Banachraum, F normiert, $S : E \times F \to \mathbb{K}$ bilinear (oder sesquilinear) und separatstetig, d.h. $s(\cdot, y) : E \to \mathbb{K}$, $s(x, \cdot) : F \to \mathbb{K}$ sind stetig $\forall\, y \in F$ bzw. $x \in E$.
Zeigen Sie: $\exists\, c \geq 0$ mit

$$|s(x, y)| \leq c\|x\|\ \|y\| \quad \forall\,(x, y) \in E \times F$$

und folgern Sie, dass s stetig ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Sei E normiert, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E$, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $\exists \eta \in E'$ mit $\eta(x_j) = a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $\|\eta\| \leq c$.

ii) $\left|\sum_{j=0}^N \lambda_j a_j\right| \leq c \left\|\sum_{j=0}^N \lambda_j x_j\right\|$ für alle $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 20 (4 Punkte).

a) Sei E normiert, $M \subset E$ dichter UVR, F Banachraum und $T : M \to F$ linear und stetig. Zeigen Sie: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widetilde{T} : E \to F$ und $\widetilde{T}$ ist linear mit $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

b) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $f \in L^1(K)$ für alle Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$, und es gelte für ein $c > 0$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi\Big| \ \leq\ c \cdot \|\varphi\|_2 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)\,.$$

Zeigen Sie: $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.