Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 13.5.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 21 (4 Punkte). Seien E_1, E_2, F Banachräume, $T_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$, $j = 1, 2$. Die Gleichung $T_1 x = T_2 y$ habe $\forall\, x \in E_1$ eine eindeutige Lösung $y \in E_2$.
Zeigen Sie: Die dadurch definierte Abbildung

$$T : E_1 \to E_2$$

ist linear und stetig.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $H = \ell^2(\mathbb{N})$,

$$T : D_T := \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \,|\, (j \cdot x_j) \in \ell^2(\mathbb{N})\} \to \ell^2(\mathbb{N}),\ (x_j) \mapsto (j \cdot x_j)\ .$$

Zeigen Sie: T ist dicht definiert, und bestimmen Sie T^*. Ist T abgeschlossen?

Aufgabe 23 (4 Punkte). Sei E ein Banachraum und $S, T \in \mathscr{L}(E)$. Zeigen Sie:

a) Ist $1 \in \rho(ST)$, so ist $1 \in \rho(TS)$ und es gilt:

$$(\mathrm{Id} - TS)^{-1} = \mathrm{Id} + T(\mathrm{Id} - ST)^{-1} S\,.$$

b) $\rho(ST) \setminus \{0\} = \rho(TS) \setminus \{0\}$.

c) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass $\rho(ST) \neq \rho(TS)$ ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte). Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C_b(X)$ der Banachraum $C_b(X) = \{f \in C(X) \,|\, f \text{ ist beschränkt}\}$ mit der Supremumsnorm sowie M_g der Multiplikationsoperator mit $g \in C_b(X) \setminus \{0\}$,

$$M_g : C_b(X) \to C_b(X),\ \ f \mapsto g \cdot f\ .$$

a) Bestimmen Sie $\sigma(M_g)$ und geben Sie Beispiele mit $\sigma_P(M_g) = \emptyset$ bzw. $\sigma_P(M_g) \neq \emptyset$ an.

b) Berechnen Sie den Spektralradius $r(M_g)$.