Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

**Übungen zur Funktionalanalysis**
– Blatt 7 –
Abgabe Dienstag, 20.5.2008, 14 Uhr s.t.

**Aufgabe 25** (3+3* Punkte). Zeigen Sie, dass zu jeder kompakten Teilmenge $K$ von $\mathbb{C}$ ein Banachraum $E$ und ein $T \in \mathscr{L}(E)$ existieren mit $\sigma(T) = K$.
(*) Zeigen Sie dieselbe Aussage für Hilberträume $H$ und $T \in \mathscr{L}(H)$.

**Aufgabe 26** (4 Punkte). Es sei die in Abs. 5.2 beschriebene Situation der schwingenden Saite gegeben. Weiter seien $v_a, b_b \in C^2(I) \setminus \{0\}$ Lösungen von $Su = 0$ mit

$$v_a(a) = v_b(b) = 0 \quad \text{und} \quad v_a'(a) = v_b'(b) = 1$$

sowie $w \in C^1(I)$ definiert durch

$$w(s) := \det \begin{pmatrix} v_a(s) & v_b(s) \\ v_a'(s) & v_b'(s) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad s \in I\,.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $s \in I$ ist
$$-\rho(s)\, w(s) = -\rho(a)\, w(a) =: c \neq 0\,.$$

b) Die Funktion
$$G : I \times I \to \mathbb{K} : (s,t) \mapsto \frac{1}{c} \cdot \begin{cases} v_a(s)\, v_b(t) & \text{für} \quad s \leq t \\ v_a(t)\, v_b(s) & \text{für} \quad t < s \end{cases}$$
ist eine Greensche Funktion von $S$, d.h. der von dem stetigen Kern $G \in C(I \times I)$ erzeugte Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K : C(I) \to C_R^2(I)$ ist die Inverse von $S$.

**Aufgabe 27** (6 Punkte). Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a \in \ell^q(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) Für alle $p \in [1, \infty]$ ist ein stetiger Operator $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^q(\mathbb{N})$ definiert durch
$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \Big( \sum_k a_{jk}\, x_k \Big)_{j \in \mathbb{Z}}\,.$$

b) Für $p \in \,]1, \infty]$ ist $T$ kompakt, im allgemeinen jedoch nicht für $p = 1$ (Gegenbeispiel).

c) Ist $p = 2$ und $a$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{jk} = 0$ für $j > k$, so ist
$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \{a_{jj} \,|\, j \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}\,.$$
Vergleichen Sie dies mit den Aussagen über den Volterra-Operator in Bsp. 4.6.