Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes
Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 8 –

Abgabe Dienstag, 27.5.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $k \in L^2\,(A \times A)$ und $K : L^2(A) \to L^2(A)$ der zugehörige Hilbert-Schmidt-Integraloperator. Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\dim\ \mathrm{Kern}\,(\lambda\, I - K) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{A\times A} |k(s,t)|^2\, d(s,t)\ .$$

(*Hinweis:* Man wähle eine ONB (g_k) von $\mathrm{Kern}(\lambda\, I - K)$ und betrachte $\sum \|g_k\|^2$.)

Aufgabe 29 (5 Punkte). Sei $k \in L^1([-1,1])$ und

$$K : L^1([0,1]) \to L^1([0,1]), f \mapsto \int_0^1 k(\circ - t) f(t) dt\ .$$

Zeigen Sie:

a) K ist ein stetiger Operator auf $L^1([0,1])$ mit $\|K\| \leq \|k\|_{1,[-1,1]}$.

b) K ist kompakt.

c) Für $k(t) := e^t$ gilt: $\forall\, \lambda \neq 0$ ist

$$\mathrm{Kern}(\lambda\,\mathrm{Id} - K) \oplus \mathrm{Bild}(\lambda\,\mathrm{Id} - K) = L^1([0,1])\ .$$

(In a) kann die Messbarkeit von $(s,t) \mapsto k(s-t)f(t)$ vorausgesetzt werden.)

Aufgabe 30 (3 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathscr{L}(E)$, für den nur die Kerne (oder nur die Bilder) von T^j stabil werden (d.h. Kern $T^q =$ Kern T^{q+1} für ein q, aber Bild $T^j \neq$ Bild T^{j+1} für alle j, bzw. umgekehrt).

Aufgabe 31 (3 Punkte). Sei H ein Hilbertraum, $S \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert und $T = S + i\,\mathrm{Id}$. Zeigen Sie:

a) T ist normal, d.h. $TT^* = T^*T$, und es gilt für alle $x \in H$

$$\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \|Sx\|^2 + \|x\|^2\ .$$

b) Die *Cayley-Transformierte* von S

$$U := (S - i\,\mathrm{Id})(S + i\,\mathrm{Id})^{-1} = T^*T^{-1}$$

ist unitär, d.h. $U^*U = \mathrm{Id}$ und $UU^* = \mathrm{Id}$.