Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 9 –

Abgabe Dienstag, 3.6.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$. Zeigen Sie:

a) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(H)$, so dass $T = T_1 + i\,T_2$.

b) T ist genau dann normal, wenn $T_1T_2 = T_2T_1$; es gilt dann $T^*T = T_1^2 + T_2^2$.

c) Ist T normal, so ist T genau dann invertierbar, wenn $T_1^2 + T_2^2$ invertierbar ist; es gilt dann $T^{-1} = T^*(T_1^2 + T_2^2)^{-1}$.

Aufgabe 33 (5 Punkte). Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

eine für $|z| \leq r$ absolut konvergente Potenzreihe und $T \in \mathscr{L}(H)$ mit $\|T\| \leq r$. Zeigen Sie:

a) $f(T) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j T^j$ konvergiert in $\mathscr{L}(H)$.

b) Ist T normal, so ist $f(T)$ normal.

c) Ist T selbstadjungiert und $a_j \in \mathbb{R}$ für alle j, so ist $f(T)$ selbstadjungiert.

d) Ist T selbstadjungiert, so ist $\exp(iT)$ unitär.

Aufgabe 34 (5 Punkte). Sei $S : C_R^2(I) \to C(I)$ der Sturm-Liouville-Operator mit stetiger symmetrischer Green-Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ und

$$T \in \mathscr{L}(L^2(I)),\; f \mapsto \int_I G(\circ, t) f(t)dt$$

der Integraloperator mit Kern G, also $T|_{C(I)} = S^{-1}$ (Aufg. 26). Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Bild} T \subset C(I)$ und $\operatorname{Kern} T = \{0\}$.

b) Es gibt eine abzählbare ONB $(u_j)_{j\in J}$ von $L^2(I)$ aus Eigenfunktionen von S zu positiven Eigenwerten μ_j.

c) Für alle $u \in C_R^2(I)$ ist $Su = \sum_{j\in J} \mu_j \langle u \,|\, u_j\rangle u_j$, wobei die Reihe in $L^2(I)$ unbedingt konvergiert.

Hinweis: $C_R^2(I)$ liegt dicht in $L^2(I)$, dies muss nicht (darf aber) begründet werden.