Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 11 –

Abgabe Dienstag, 17.6.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Mit den Bezeichnungen aus Abs. 6.5 seien folgende Differentialgleichungen gegeben:

1) (D) $\partial_t{}^2\varphi_t + 2\alpha\partial_t\varphi_t = -S\varphi_t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

   (R) $\varphi_t \in C^2_R(I) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

   (A) $\varphi_0 = h$ mit $h,\, Sh \in C^2_R(I)$, $\partial_t\varphi_0 = 0$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \sqrt{\mu_j}$ für alle j.

2) (D) $\partial_t\varphi_t = -S\varphi_t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

   (R) $\varphi_t \in C^2_R(I) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

   (A) φ_0 mit $h,\, Sh \in C^2_R(I)$

a) Bestimmen Sie mit dem Separationsansatz für 1) und 2) für jedes j eine nicht triviale Lösung
$$w_j(t,x) = v_j(t)\, u_j(x)$$
von (D).

b) Stellen Sie jeweils eine Lösungsformel für φ_t auf und begründen Sie (mit Verweis auf die Vorlesung), dass φ_t (D), (R), (A) erfüllt.

c) Betrachten Sie in 2) den Fall, dass nur $h \in L^2(I)$ gilt. In welchem Sinn ist dann φ_t aus b) noch Lösung?

Aufgabe 39 (4 Punkte). Sei
$$g : [1,\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\, \mathbf{1}_{[j,j+1[}(t)$$
und $M_g \in \mathscr{L}(L^2([1,\infty[))$ der Multiplikationsoperator, $M_g(h) = g \cdot h$. Zeigen Sie:

a) $\sigma_p(M_g) = \left\{ \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ und $\sigma(M_g) = \overline{\sigma_p(M_g)}$.

b) Ist $f \in C(\sigma(M_g))$, so ist $f(M_g) = M_{f\circ g}$.

c) Ist M_g kompakt?

Aufgabe 40 (4 Punkte). Sei $S \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie:

a) Ist $f, g \in C(\sigma(S))$ mit $f \cdot g = 0$, so ist Bild $f(S) \perp$ Bild $g(S)$.

b) Ist $\sigma(S) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit σ_1, σ_2 abgeschlossen, disjunkt, $\neq \emptyset$, so existieren reduzierende Untervektorräume M_1, M_2 von S mit $H = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \perp M_2$.