Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 12 –

Abgabe Dienstag, 24.6.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 41 (4 Punkte). Sei H ein komplexer Hilbertraum, $S \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert, $f \in C_p(\sigma)$.

a) Zeigen Sie: Ist $f \geq \epsilon > 0$ auf σ, so ist $0 \in \rho(f(S))$ und $\langle f(S)x \,|\, x \rangle > 0$ für alle $x \in H \setminus \{0\}$.

b) Folgt aus $f > 0$ auf σ auch $0 \in \rho(f(S))$?

Aufgabe 42 (4 Punkte). Zeigen Sie: Die Spektralschar $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eines selbstadjungierten Operators $S \in \mathscr{L}(H)$ ist rechtsstetig, d.h. für alle $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \searrow \lambda} \langle F_t x \,|\, x \rangle = \langle F_\lambda x \,|\, x \rangle \ .$$

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $I = [a, b]$, $g : I \to \mathbb{R}$ stetig, $J := g(I)$, $S = M_g \in \mathscr{L}(L^2(I))$ der Multiplikationsoperator und $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von M_g. Zeigen Sie:

a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist F_t ein Multiplikationsoperator, geben Sie F_t konkret an.

b) Für $F(t) = \langle F_t 1 \,|\, 1 \rangle$ gilt die verallgemeinerte Substitutionsformel

$$\int_I f(g(s))ds = \int_J f(t)dF(t) \qquad \text{für alle } f \in C_p(J)$$

c) Ist $g \in C^1(I)$ und streng monoton wachsend, so ist $F \in C^1(J)$. Berechnen Sie $F'(t)$.

Aufgabe 44 (4 Punkte). Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig,

$$D_{M_g} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, g \cdot f \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad M_g : D_{M_g} \to L^2(\mathbb{R}),\ f \mapsto g \cdot f \ .$$

Zeigen Sie: M_g ist dicht definiert und abgeschlossen. Bestimmen Sie M_g^*.