Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes
Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 13 –
Abgabe Dienstag, 1.7.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 45 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass der symmetrische Sturm-Liouville-Operator

$$S : C^2_R(I) \to C(I),\ u \mapsto -(\rho u')' + \sigma u$$

aus Beispiel 5.8 als Operator in $L^2(I)$ wesentlich selbstadjungiert ist.
Hinweis: Für den wie in Aufgabe 26 definierten Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K \in \mathscr{L}(L^2(I))$ gilt: $S \pm i \operatorname{Id} = (\operatorname{Id} \pm iK)S$ und K ist selbstadjungiert.

Aufgabe 46 (4 Punkte). Sei H Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, sei $y_0 := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} y_j \in H$,

$$D_T := \operatorname{Span}\{y_j \mid j \in \mathbb{N}\} \quad , \quad (*) \quad T : D_T \to H,\ \sum_{j=0}^{m} \alpha_j y_j \mapsto \alpha_0 y_0 \ .$$

Zeigen Sie:

a) T ist durch $(*)$ (wohl-)definiert, D_T ist dicht und T ist unstetig.

b) $\overline{\mathcal{G}(T)} = H \times \mathbb{K}\, y_0$.

Aufgabe 47 (4 Punkte).
Beweisen Sie die Formel für die partielle Integration aus Satz 8.12a.

Aufgabe 48 (4 Punkte). Sei $I =]0,1[$, $D_T := \{u \in H^1(I) \mid u(0) = 0\}$,

$$T : D_T \to L^2(I),\ u \mapsto \frac{1}{i}\partial u \ .$$

Zeigen Sie: $\sigma(T) = \emptyset$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2(I)$ gilt

$$(\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1} g(t) = \frac{1}{i} \int_0^t e^{i\lambda(t-s)} g(s) ds \ .$$

***Aufgabe 49** (4 Punkte). Sei $U \in \mathscr{L}(H)$ unitär und $U - \operatorname{Id}$ injektiv.

a) Zeigen Sie:
$$S := i(\operatorname{Id} + U)(\operatorname{Id} - U)^{-1} \quad \text{mit} \quad D_S := \operatorname{Bild}(\operatorname{Id} - U)$$
ist selbstadjungiert und die Cayley-Transformierte U_S von S ist U.

b) Bestimmen Sie S für den Shift $U \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $(x_j) \mapsto (x_{j-1})$.