Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 4 —

Abgabe: Mittwoch, den 16.5.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Berechne die folgenden Kurvenintegrale und zeichne die Spuren der Kurven.

(i) $\int\limits_\gamma |z|\,dz$ für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2it & \text{für } \; 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e^{i\pi t} & \text{für } \; \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

(ii) $\int\limits_\eta z\, e^{z^2} dz$ für $\eta : [0,2] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\eta(t) = \begin{cases} it & \text{für } \; 0 \le t \le 1 \\ 2i - 1 - t(i-1) & \text{für } \; 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

(2) (4 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind sternförmig bzw. konvex.

(i) $A = \mathbb{C} \setminus \{t \cdot (1+i) : t \ge 0\}$.

(ii) $B = \left\{ \frac{z-1}{z+1} \,\middle|\, z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0 \right\}$.

(iii) $C = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Stelle jeweils die Mengen graphisch dar.

(3) (4 Punkte)
Definiere $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \text{und} \qquad \cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right).$$

Beweise:

(i) sin und cos sind $\mathbb{C}$-diffbar auf $\mathbb{C}$.

(ii) $\sin'(z) = \cos(z)$ und $\cos'(z) = -\sin(z)$.

(iii) sin und cos sind surjektiv (auf $\mathbb{C}$), d.h. $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ und $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(iv) Die Einschränkungen $\sin|_\mathbb{R}$ und $\cos|_\mathbb{R}$ sind die "reellen" Sinus- bzw. Cosinusfunktionen.

(v) sin und cos sind 2π-periodisch, d.h.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z) \qquad \text{und} \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

(vi) Finde analoge Funktionalgleichungen für $\sin(z+\pi)$ und $\cos(z+\pi)$ bzw. $\sin(z+\frac{\pi}{2})$ und $\cos(z+\frac{\pi}{2})$.

(4) (4 Punkte)
Beweise ausführlich die Formeln

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_{\gamma} \omega$$

und

$$\int_{\gamma} \overline{\omega} = \overline{\int_{\gamma} \omega}$$

für $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma : [a, b] \to U$ und stetige 1-Formen $\omega = f\,dz + g\,d\overline{z}$ auf U, wobei

$$\gamma^-(t) := \gamma\,(a + b - t)$$

die umgekehrte Kurve ist und

$$\overline{\omega} := \overline{g}\,dz + \overline{f}\,d\overline{z}$$

die komplex-konjugierte 1-Form.