Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

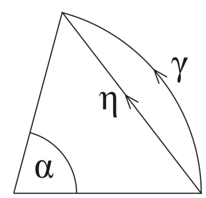
Übungen zur Funktionentheorie I
— Blatt 9 —

Abgabe: Mittwoch, den 20.6.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)

(i) Beweise: Ein stetig diffbarer Weg γ und seine Umparametrisierung $\gamma \circ \varphi$ sind homotop.

(ii) Konstruiere eine Homotopie zwischen einem Kreisbogen γ (mit Winkel $\alpha < \pi$) und der zugehörigen Sekante η:



(2) (4 Punkte)
Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen
(i) $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^{n^2}}{n!}$ (ii) $\sum\limits_{n \geq 0} (\cos n)\, z^n$.
(*Hinweis zu (ii):* Beweise nacheinander die Konvergenz für $|z| < R$ und die Divergenz für $|z| > R$ mit passendem R.)

(3) (4 Punkte)
Zeige, dass durch

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

eine in $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ holomorphe Funktion definiert wird.

(4) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \neq 0$. Setze $N_f := \{z \in \mathbb{C} : \ f(z) = 0\}$.
Beweise: $\mathbb{C} \setminus N_f$ ist ein Gebiet.

(*Bemerkung:* Wer seine Argumente noch ein wenig ausbauen möchte, kann sich auch an der allgemeineren Aussage versuchen: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \neq 0$, so folgt, dass $D \setminus N_f$ ein Gebiet ist.)