Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 1 –

Abgabe Dienstag, 21.04.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 1 (*Wiederholung Analysis*). (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen halben Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen halben Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen. *richtig* ☐ *falsch* ☐
2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $U \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende Menge. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend. *richtig* ☐ *falsch* ☐
3. Jede quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in die Form $z'^2 = C$ mit $C \in \mathbb{C}$ bringen. *richtig* ☐ *falsch* ☐
4. Jede Gleichung der Form $z'^2 = C$ mit $C \in \mathbb{C}$ besitzt eine (effektiv berechenbare) Lösung $z' \in \mathbb{C}$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
5. Eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert innerhalb ihres Konvergenzradius lokal gleichmäßig. *richtig* ☐ *falsch* ☐
6. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist auch die Grenzfunktion stetig. *richtig* ☐ *falsch* ☐
7. Für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ gilt:
$\inf \{\, f(x) \,|\, x \in [a, b] \,\} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq ||f||_{[a,b]} \cdot (b - a)$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
8. Die Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ berechnet sich durch: $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'||_2$. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2 (*Reelle C^∞-Funktionen*). (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre Taylor-Entwicklung in 0.

b) Konstruieren Sie eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die

$$g(x) = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad \text{und} \quad g(x) = 1 \quad \text{für } x > 1$$

gilt.

Aufgabe 3 (*Komplexe Zahlen*). (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$\frac{i-1}{i+1} \quad , \quad \frac{3+4i}{1-2i} \quad , \quad i^n \quad , \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

b) Bestimmen Sie den Betrag der folgenden Zahlen:

$$(1+i)^{17} - (1-i)^{17} \quad , \quad \frac{1+ia}{1-ia} \quad (a \in \mathbb{R})$$

c) Bestimmen Sie alle a, $b \in \mathbb{R}$, für die $(a+ib)^2 = 4+3i$ gilt.

Aufgabe 4 (*Topologie in* $\mathbb{C}$). (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf die Eigenschaften offen, abgeschlossen, kompakt, zusammenhängend:

a) $M_1 = \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$,

b) $M_2 = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{Re}(z) \}$,

c) $M_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-4i| \leq 2 \} \cup \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 3 \}$,

d) $M_4 = \{ \exp(ix) := \cos(x) + i \sin(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.