Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 2 –

Abgabe Dienstag, 28.04.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 5 (*Funktionenreihen und -folgen in $\mathbb{C}$*). (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$ auf $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_n(z) = z^n$.

(i) Bestimmen Sie die größte Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass für ein irrationales $\tau \in \mathbb{R}$ die Menge $\{e^{2\pi i \tau n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in S^1 liegt.

(ii) Konvergiert die Folge gleichmäßig auf D?

(iii) Konvergiert die Folge lokal gleichmäßig auf D?

(iv) Konvergiert die Folge (lokal) gleichmäßig auf dem Inneren von D?

Aufgabe 6 (*Komplexe Differenzierbarkeit*). (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Punkte $x + i\,y \in \mathbb{C}$, in denen $f(x + iy) = y^2 \sin x + i\,y$ komplex differenzierbar ist.

b) Es sei $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$. Bestimmen Sie eine Funktion $v(x, y)$, so dass die Funktion $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist. Ist $v(x, y)$ eindeutig?

Aufgabe 7 (*Winkeltreue*). (3 Punkte)

Für $k \in \mathbb{Z}$ seien $H_k = i\,k + \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $V_k = k + i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ die horizontalen bzw. vertikalen Koordinatenlinien in $\mathbb{C}$, und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 .$$

Skizzieren Sie die Bilder $f(H_k)$ und $f(V_k)$ für $-2 \le k \le 2$. Achten Sie dabei auf die Winkeltreue von f in $z \neq 0$.

Aufgabe 8 (*Wirtinger Ableitungen*). (4 Punkte)

Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ reell partiell differenzierbar. Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

mit $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$ für $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}$.

a) Zeigen Sie: Falls f in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph ist, so gilt $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn f reell total differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f genau dann antiholomorph ist, wenn f reell total differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ gilt.

d) Sei $f(z) = z^2 \bar{z}^3$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.