Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I
– Blatt 3 –
Abgabe Dienstag, 05.05.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 9 (*Holomorphe Funktionen*). (4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

a) $\mathrm{Re} f$ ist konstant,

b) $\mathrm{Im} f$ ist konstant,

c) $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$,

d) $|f|$ ist konstant,

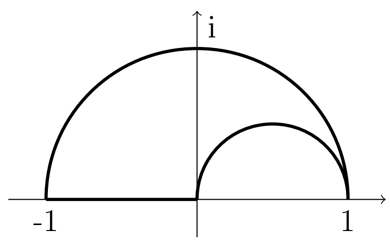
e) f ist holomorph und antiholomorph.

Aufgabe 10 (*Kurven in* $\mathbb{C}$). (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Spur folgender Kurve:

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto cos(3t)\, e^{it}\ .$$

b) Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden geschlossenen Kurve an, beginnend in 0 und in positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufend:



Aufgabe 11 (*Kurvenintegral*). (4 Punkte)
Sei γ_1, bzw. γ_2 der Weg von $-i$ nach i entlang der Einheitskreislinie mit positiver, bzw. negativer Drehrichtung. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z)\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z)\, dz\ .$$

b/w

Aufgabe 12 (*Rechnen mit Integrationswegen*). (4 Punkte)

a) Gegeben seien zwei Wege $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definieren Sie einen „zusammengesetzten" Weg $\gamma_1\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, und zeigen Sie für integrierbare Funktionen f:

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \ .$$

b) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Definieren Sie den „umgekehrt durchlaufenen" Weg $\gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$, und zeigen Sie für integrierbare Funktionen f:

$$\int_{\gamma^{-1}} f = -\int_{\gamma} f \ .$$

c) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $g : [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Zeigen Sie für $\gamma \circ g : [c,d] \to \mathbb{C}$ und eine integrierbare Funktion f:

$$\int_{\gamma\circ g} f = \int_{\gamma} f \ .$$