Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 26.05.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 19 (*Identitätssatz*). (4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zu jedem Punkt $p \in U$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung von f um p mindestens einen Koeffizienten, der Null ist. Beweisen Sie, dass f ein Polynom ist.

Hinweis: Wählen Sie ein Kompaktum $K \subset U$, welches überabzählbar viele Elemente enthält, und betrachten Sie die Mengen $N_n := \{ z \in K \mid f^{(n)}(z) = 0 \}$.

Aufgabe 20. (4 Punkte)
Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \ .$$

Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl λ existiert mit $f = \lambda g$.

Hinweis: Wenden Sie den Identitätssatz auf g, dann den Riemannschen Hebbarkeitssatz auf f/g und schließlich den Satz von Liouville auf f/g an.

Aufgabe 21 (*Regel von de L'Hospital*). (4 Punkte)
Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die in einem Punkt $p \in D$ dieselbe Nullstellenordnung $k \neq \infty$ besitzen. Beweisen Sie:

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(p)}{g^{(k)}(p)} \ .$$

Aufgabe 22 (*Betragsmaxima*). (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Maximum von $|z^2 + z - 1|$ auf $\overline{B_n(0)} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n \}$.

b) Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ auf $\overline{B_1(0)} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$ für

   (i) $f(z) = \frac{z+3}{z-3}$,

   (ii) $f(z) = 3 - |z|^2$.

   Im zweiten Fall liegt das Betragsmaximum im Inneren von $\mathbb{E}$. Ist das ein Widerspruch zum Maximumsprinzip?