Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I
– Blatt 10 –
Abgabe Dienstag, 23.06.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 33 (*Laurent-Entwicklung, Standardaufgabe*). (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 6}{z^2 + 5z + 6}$$

für folgende Kreisringe:

a) $B_2(0)$, b) $B_{2,3}(0)$, c) $B_{3,\infty}(0)$.

Aufgabe 34 (*Abschätzung für die Laurent-Koeffizienten*). (4 Punkte)
Es sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität im Punkt p. Sei nun $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ die zugehörige Laurent-Reihe.

a) Beweisen Sie die folgende Abschäatzung für die Laurent-Koeefizienten:

$$|a_n| \leq \frac{||f||_{\partial B_r(p)}}{r^n}$$

für jedes $r > 0$ mit $B_r(p) \setminus \{ p \} \subset U$.

b) Nutzen Sie a), um einen alternativen Beweis des Riemannschen Hebbarkeitssatzes zu geben.

Aufgabe 35 (*Residuensatz*). (4 Punkte)
Es sei $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto \begin{cases} 2(1-t)e^{2\pi i t} & \text{falls } t \in [0,1] \\ e^{-\pi i(t-1)} - 1 & \text{falls } t \in [1,2] \\ 4t - 10 & \text{falls } t \in [2,3] \end{cases}$$

der Integrationsweg aus Aufgabe 26 b). Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2 + \frac{i}{2}z - \frac{1}{16})(z + \frac{1}{2} + \frac{i}{4})(z + 1 + \frac{i}{4})}\, dz \ .$$

Aufgabe 36 (*Berechnung von Residuen*). (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten und ihre Residuen.

a) $\frac{z^3}{(1+z)^3}$,

b) $\frac{\sin(z)}{\cos(z)-1}$,

c) $z \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$.