

Übungen zur Funktionentheorie I
– Blatt 11 –
Abgabe Dienstag, 30.06.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 37 (*Residuen*). (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit endlicher Ordnung $\text{ord}_p(f)$ und $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

a) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen

$$\text{Res}(gf, p) \neq g(p) \cdot \text{Res}(f, p)$$

gilt.

b) Zeigen Sie

$$\text{Res}\left(g \frac{f'}{f}, p\right) = g(p) \cdot \text{ord}_p(f).$$

Aufgabe 38 (*Reelle Integrale*). (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung des Residuenkalküls.

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$, $a \in B_1(0)$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8 - 4x + x^2} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx$.

Aufgabe 39 (*Satz von Rouché*). (4 Punkte)
Wieviele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzt die Funktion

$$f(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i$$

im Kreisring $B_{1,2}(0)$?

Am Dienstag, den 23. Juni, bieten wir in HS V (Lahnberge) ab 16:30 Uhr eine allgemeine Fragestunde zur Vorlesung an.