Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 12 –

Abgabe Dienstag, 07.07.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 40 (*Fundamentalsatz der Algebra*). (4 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché den Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ hat genau n Nullstellen.

Hinweis: Betrachten Sie für $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ die Funktionen $f(z) = a_n z^n$ und $g(z) = p(z)$ auf $\partial B_r(0)$ mit hinreichend großem $r > 0$.

Aufgabe 41 (*Jordan Normalform*). (4 Punkte)
Aus der Linearen Algebra ist bekannt:

> Für jede Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass AMA^{-1} entweder eine Diagonalmatrix oder eine obere Dreiecksmatrix mit zwei gleichen Diagonalelementen ist.

Geben Sie hierfür einen funktionentheoretischen Beweis.

Hinweis: Bestimmen Sie als ersten Schritt ein $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass die Möbiustransformation $\varphi_{BMB^{-1}}$ einen Fixpunkt in ∞ hat.

Aufgabe 42 (*Doppelverhältnis*). (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ von vier paarweise verschiedenen Punkten in $\mathbb{C}$ genau dann reell ist, wenn die Punkte auf einer gemeinsamen Geraden oder einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 43 (*Automorphismen der oberen Halbebene*). (4 Punkte)
Zeigen Sie

a)
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}\,,\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} .$$

Hinweis: Mit der Notation der Vorlesung wählen Sie: $a^2 := \frac{e^{i\varphi}}{1-|p|^2}$, $b := -pa$.

b)
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \right\} .$$