Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Funktionentheorie I

– Klausur –

Donnerstag, 16.7.2009, 10:15-11:45 Uhr, HG 6 & 7

Name, Vorname ____________________________

Matrikelnummer ____________________________

Studiengang ____________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Füllen Sie das Deckblatt aus.
- Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	4	6	4	4	4	4	26
Erreicht							

Notenpunkte (Note): __________

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen halben Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen halben Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Ist die Gesamtpunktzahl negativ, so wird zu Null aufgewertet.

1. Für jede geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}^*$ gilt $\int\limits_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = 0$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
2. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant. *richtig* ☐ *falsch* ☐
3. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit unendlich vielen Nullstellen, so ist $f = 0$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
4. Es gilt $\int\limits_{\partial B_1(0)} \frac{z}{z-5}\, dz = 0$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
5. Die Funktion $B_{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin z$, hat eine holomorphe Wurzel. *richtig* ☐ *falsch* ☐
6. Die Funktion $z \mapsto |\cos(z)|$ nimmt ein Maximum in $B_1(0)$ an. *richtig* ☐ *falsch* ☐
7. Falls die holomorphen Funktionen f und g im Punkt $p \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität haben, dann gilt $\operatorname{Res}_p(f+g) = \operatorname{Res}_p(f) + \operatorname{Res}_p(g)$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
8. Möbiustransformationen bilden Kreise auf Kreise ab. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine **kurze Begründung** oder ein **Gegenbeispiel** an. (Antworten ohne Begründung oder Gegenbeispiel ergeben keine Punkte; falsche Antworten ergeben keinen Punktabzug.)

a) Falls die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ beide im Nullpunkt einen Pol haben, dann hat auch die Summe $f + g$ im Nullpunkt einen Pol.

b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus B_1(0)$ holomorph, so ist $1/f$ konstant.

c) Ist $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so ist f die Identität.

d) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil die Funktion $z = x + iy \mapsto xy$ ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen, für die

$$f(g(z)) = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Zeigen Sie: Ist g nicht konstant, so ist f die Nullabbildung.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

in dem Kreisring $B_{0,2}(1)$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} \cos(2\pi t)\, e^{i\pi t} & ,\ t \in [0,1] \\ e^{i\pi(2-t)} & ,\ t \in [1,2] \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Integrationsweg γ und bestimmen Sie

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{16z^4 - 1}\, dz .$$

(Zwischenergebnis zur Kontrolle: $\pm\frac{i}{2}$ sind die einzigen Singularitäten des Integranden, die in $\mathrm{Int}(\gamma)$ liegen.)

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^7 - 5z^3 + 12$$

in $B_{1,2}(0)$ liegen.

Zusatzblatt