Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis
– Blatt 2 –
Abgabe Donnerstag, 6.5.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ quadrat-summierbar, d.h. $\|(a_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ die „abgeschnittene" Folge, definiert durch

$$b_n^k := \begin{cases} a_n & , \ n \le k, \\ 0 & , \ n > k. \end{cases}$$

Beweise: Es gilt $\|b^k - a\| \to 0$ für $k \to \infty$. (Dies zeigt, dass $\ell^0(\mathbb{N})$ in $\ell^2(\mathbb{N})$ dicht liegt.)

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Die (komplexe) *Heisenberg-Gruppe* N ist definiert als Menge $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$, mit der Verknüpfung

$$(\alpha, z) \circ (\beta, w) := (\alpha\beta e^{(z|w)}, z + w)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ und $z, w \in \mathbb{C}$.

a) Beweise, dass N eine Gruppe ist; bestimme das neutrale Element und das Inverse.

b) Beweise, dass $(\alpha, 0)$ mit allen Elementen von N kommutiert, d.h. N liegt im „Zentrum" $\mathbb{C}^\times \times 0$.

c) Ist N als Gruppe isomorph zu $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$?
(Als Mengen sind beide gleich, es genügt aber nicht zu argumentieren, dass die Verknüpfungen verschieden aussehen.)

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Als offene Menge in $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ hat N (siehe Aufgabe 6) den Tangentialraum $\mathfrak{n} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in $(1, 0)$. Betrachte diffbare Kurven $t \mapsto (\alpha_t, z_t)$ und $t \mapsto (\beta_t, w_t)$ mit $\alpha_0 = 1 = \beta_0$, $z_0 = 0 = w_0$. Setze

$$(\dot\alpha, \dot z) := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\alpha_t, z_t) \ , \quad (\dot\beta, \dot w) := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\beta_t, w_t)$$

und bestimme die „Summe"

$$(\dot\alpha, \dot z) + (\dot\beta, \dot w) := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\alpha_t, z_t) \circ (\beta_t, w_t)$$

und den „Kommutator"

$$[(\dot\alpha, \dot z), (\dot\beta, \dot w)] := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\alpha_t, z_t) \circ (\beta_s, w_s) \circ (\alpha_t, z_t)^{-1} \circ (\beta_s, w_s)^{-1} \ .$$

Aufgabe 8. (Wiederholungsaufgabe, nicht abzugeben)
Sei H ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit (positiv definitem) inneren Produkt $(v|w)$ (anti-linear in v, linear in w). Setze $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.

a) Beweise die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|(v|w)|^2 \leq (v|v)(w|w) \qquad (*)$$

für alle $v, w \in H$.
(Benutze, dass der Vektor $u := v(w|w) - w(w|v)$ die Bedingung $(u|u) \geq 0$ erfüllt).

b) In $(*)$ gilt Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

c) Zeige als Konsequenz die Dreiecks-Ungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

(quadriere beide Seiten).