Fachbereich Mathematik und Informatik Sommersemester 2010
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Komplexe und harmonische Analysis
– Blatt 3 –
Abgabe Donnerstag, 6.5.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Sei $H^2_+(\mathbb{C})$ der (abgeschlossene) Unterraum aller $\psi \in H^2(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\psi(z) = \psi(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

(d.h. ψ ist eine *gerade* Funktion).

a) Finde eine Orthonormal-Basis von $H^2_+(\mathbb{C})$.

b) Bestimme die zugehörige Kernfunktion $K_+(z, w)$.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Für $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ sei

$$(T_{a,b}p)(z) := p(az + b) \ .$$

Beweise:

a) $T_{a,b}$ ist ein Algebra-Isomorphismus von $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

b) Bestimme die Verkettung $T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta}$ für $a, \alpha \in \mathbb{C}^\times$, $b, \beta \in \mathbb{C}$.

c) Lässt der adjungierte Operator $T^*_{a,b}$ (bzgl. $H^2(\mathbb{C})$) die Polynom-Algebra invariant?

Aufgabe 11. (mündlich)
Sei A eine assoziative Algebra (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Einselement e (nicht notwendig kommutativ). Sei $G(A) \subset A$ die Gruppe der invertierbaren Elemente in A, und sei $\mathfrak{g}(A) = A$, aber versehen mit dem Kommutator-Produkt

$$[\alpha, \beta] := \alpha\beta - \beta\alpha$$

für $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}(A)$.

a) Beweise die „Jacobi-Identität“

$$[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$$

für $\alpha, \beta, \gamma \in (A)$. Man sagt, $\mathfrak{g}(A)$ ist eine *Lie-Algebra* mit dem Kommutator-Produkt.

b) Zeige: Die Gruppe $G(A)$ *operiert* auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ vermöge

$$g \cdot \alpha := g\alpha g^{-1} \quad \text{für } g \in G(A),\ \alpha \in \mathfrak{g}(A) \ ,$$

d.h. es gilt

$$g \cdot [\alpha, \beta] = [g \cdot \alpha, g \cdot \beta] \ .$$

Aufgabe 12. (mündlich)

Setzt man $A = \mathrm{End}(V)$ für einen Vektorraum V endlicher Dimension, so setzt man

$$\mathrm{GL}(V) := G(A) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{gl}(V) := \mathfrak{g}(A)\ .$$

Insbesondere kann $V = A$ gewählt werden. Für festes $a, b \in A$ betrachte die Multiplikations-Operatoren

$$L : A \to \mathrm{End}(A),\ x \mapsto L_x a := xa \quad \text{und} \quad R : A \to \mathrm{End}(A),\ y \mapsto R_y a = ay$$

für $x \in A$, und setze

$$\mathrm{ad}_x\, a = L_x a - R_x a = [x, a]\ .$$

Beweise:

a) L und R sind Algebra(anti)homomorphismen.

b) $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}(A) \to \mathfrak{gl}(A)$ ist ein Liealgebra-Homomorphismus, d.h.

$$[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$$

für alle $x, y \in \mathfrak{g}(A)$.

c) Die Gruppe $G(A)$ ist offen in A.
Hinweis: $a \in A$ ist invertierbar genau dann, wenn L_a (oder R_a) invertierbar ist. Benutze Determinanten-Argumente

d) Die Abbildung $\exp : \mathfrak{g}(A) \to G(A)$ mit

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{für } a \in \mathfrak{g}(A)$$

ist wohldefiniert und invertierbar, mit Inversen $\exp(-a)$.
Hinweis: Kommutieren a und b, so gilt $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.