Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis

– Blatt 4 –

Abgabe **Montag, 17.5.2010** im Tutorium

Im folgenden sei $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $g = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Wir betrachten differenzierbare Kurven $t \mapsto g(t)$, d.h. $t \mapsto g_{ij}(t)$ für alle i, j. Der zugehörige *Tangentialvektor* $\dot{g}(t)$ ist die (nicht notwendig invertierbare) $n \times n$-Matrix $\dot{g}(t) = (\dot{g}_{ij}(t))$ der Ableitungen nach t.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Sei $t \mapsto g(t)$ mit $g(0) = g$ fest. Beweise für die Kurve $t \mapsto g(t)^{-1} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

$$\frac{d}{dt}\, g(t)^{-1}\Big|_{t=0} = -g^{-1}\,\dot{g}(0)\,g^{-1}.$$

Hinweis: Wende die Produktregel auf die Identität $g(t)\,g(t)^{-1} = \mathrm{Id}$ an, genauer auf die entsprechenden Identitäten für alle Koeffizienten.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Sei $g \mapsto g^{\#}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Transformation von $n \times n$-Matrizen, die entweder $\mathbb{C}$-linear ($(\alpha g)^{\#} = \alpha g^{\#}$) oder $\mathbb{C}$-antilinear ($(\alpha g)^{\#} = \overline{\alpha} g^{\#}$) ist und weiterhin ein Homomorphismus ($(g_1\, g_2)^{\#} = g_1^{\#}\, g_2^{\#}$) oder ein Anti-Homomorphismus ($(g_1\, g_2)^{\#} = g_2^{\#}\, g_1^{\#}$) ist.

(i) Welche dieser Eigenschaften besitzen die “klassischen” Transformationen

$$\begin{aligned} g^{\#} &:= \overline{g} = (\overline{g}_{ij}) \\ g^{\#} &:= g^T = (g_{ji}) \\ g^{\#} &:= g^* = (\overline{g})^T = (g^T)^- = (\overline{g}_{ji}). \end{aligned}$$

(ii) Beweise: Die Menge

$$(*) \qquad G := \{g \in GL(n,\mathbb{C}) : g^{-1} = g^{\#}\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Für eine abgeschlossene Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist die *Lie-Algebra* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}l(n,\mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert als Menge aller Tangentialvektoren in $\mathrm{id} \in G$, d.h.

$$\mathfrak{g} = \{\dot{g}(0) | t \mapsto g(t) \in G,\ \ g(0) = \mathrm{id}\}.$$

Beweise: Die Summe und das Negative zweier Vektoren in $\mathfrak{g}$ gehören zu $\mathfrak{g}$.
(Betrachte $g_1(t)\, g_2(t)$ bzw. $g(t)^{-1}$).

Aufgabe 16. (4 Punkte)

(a) Bestimme die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der in (*) definierten Gruppe (leite die Identität $g(t)^{-1} = g(t)^{\#}$ in $t = 0$ ab).

(b) Zeige, dass für $X, Y \in \mathfrak{g}$ auch der Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ zu $\mathfrak{g}$ gehört. (Benutze die Eigenschaften von $\#$).