Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis
– Blatt 5 –
Abgabe Donnerstag, 27.5.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Beweise, dass die Heisenberg-Gruppe $\mathbb{C} \times \mathbb{T}$ genau das Zentrum $\{0\} \times \mathbb{T}$ besitzt, d.h. ein Element $(a, \sigma) \in \mathbb{C} \times \mathbb{T}$ kommutiert genau dann mit allen Elementen $(b, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{T}$, wenn $a = 0$.

Aufgabe 18. (4 Punkte)
Die (3-dimensionale) Heisenberg-Gruppe $\mathbb{H}_3 = \mathbb{C} \times \mathbb{T}$ kann zu einer 4-dimensionalen Lie-Gruppe G erweitert werden, indem man für $b \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \mathbb{T}$ und $s \in \mathbb{T}$ setzt:

$$(*) \qquad (\pi(s, b, \sigma)\psi)(z) = \sigma\psi(sz + b)\, e^{-sz\bar{b} - b\bar{b}/2}.$$

(i) Bestimme die Verkettung $\pi(s, a, \sigma)\, \pi(t, b, \tau)$ für $s, t, \sigma, \tau \in \mathbb{T}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

(ii) Zeige, dass die Transformationen (*) auf $H^2(\mathbb{C})$ unitär sind.

Aufgabe 19. (4 Punkte)
Sei $C \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ ein Großkreis, dargestellt in der Form

$$C = C_A := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (z, 1)\, A \begin{pmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

für eine geeignete 2×2-Matrix A.

(i) Bestimme die bi-holomorphen Automorphismen $G = \mathrm{Hol}(D) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ des Gebietes

$$D := \text{„Inneres“ von } C_A.$$

(ii) Beschreibe (i) D_i = obere Halbebene, (ii) D_{-1} = linke Halbebene, sowie D_∞ = Äußeres des Einheitskreises mit Hilfe geeigneter Großkreise C_i, C_{-1}, C_∞ und beschreibe die zugehörigen Gruppen G_i, G_{-1}, G_∞ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Aufgabe 20. (4 Punkte)
Die 3 Großkreise $\mathbb{R} \cup \infty$, $i\mathbb{R} \cup \infty$, $\mathbb{T}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ bestimmen jeweils 2 “Halbkugeln”, mit 8 “Viertelkugeln” als Durchschnitt.

(i) Beschreibe die Halbkugeln durch jeweils eine Ungleichung.

(ii) Beschreibe die Viertelkugeln durch jeweils zwei Ungleichungen.

(iii) Finde eine endliche Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ von “Cayley-Transformationen”, welche die Halbkugeln permutiert und so dass es zu je zwei Halbkugeln ein Element der Untergruppe gibt, das die beiden Halbkugeln vertauscht.

(iv) Versuche eine ähnliche Konstruktion für die Viertelkugeln (vermutlich muß die (nicht-holomorphe) komplexe Konjugation einbezogen werden). Schreibe die entstehende Gruppe als halbdirektes Produkt $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$.