Fachbereich Mathematik und Informatik Sommersemester 2010
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

**Komplexe und harmonische Analysis**
– Blatt 7 –
Abgabe Donnerstag, 10.6.2010, 10 Uhr s.t.

**Aufgabe 25.** (4 Punkte)
Es sei $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

a) Beweise, dass $G$ die folgenden Untergruppen hat

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} ,$$
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} ,$$
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R}, r > 0 \right\} .$$

b) Realisiere $K$, $N$, $A$ mittels Möbius-Transformationen.

c) Zeige, dass $G = KAN$ gilt, d.h. jedes $g \in G$ kann als Produkt $g = kan$ mit $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$ geschrieben werden.
Hinweis: Betrachte die Spalten der Matrix $g \in G$ als Basis von $\mathbb{C}^2$ und verwende, dass sie sich nach dem Verfahren von Gram-Schmidt orthonormalisieren lässt.

d) Zeige, dass diese Zerlegung eindeutig ist.

e) Zeige, dass $NA = AN$ ein halbdirektes Produkt ist. Gilt dies auch für die anderen Kombinationen $KN$ und $KA$?

**Aufgabe 26.** (4 Punkte)
Bestimme eine zur Aufgabe 25 entsprechende Zerlegung von

$$G = \mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \middle| |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} .$$

Hinweis: Setze $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(1,1)$ in Relation zueinander.