Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis

– Blatt 8 –

Abgabe Donnerstag, 17.6.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 27. (4 Punkte)
Beweise: Für jedes $z \in \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ existiert genau eine Möbius-Transformation $\gamma_z \in G_{\mathbb{B}} = SU(1,1)$ mit den beiden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \gamma_z(0) &= z \\ \gamma_z^* &= \gamma_z \qquad \text{(als Matrix).} \end{aligned}$$

Drücke die Koeffizienten $\gamma_z = \begin{pmatrix} a_z & b_z \\ \overline{b}_z & \overline{a}_z \end{pmatrix}$ explizit durch z aus. Bestimme γ_z^{-1} und γ_{-z}.

Aufgabe 28. (4 Punkte)
Finde analog zu jedem $w \in \mathbb{H}$ (obere Halbebene) eine eindeutig bestimmte "natürliche" Möbius-Transformation $\delta_w \in G_{\mathbb{H}} = SL(2,\mathbb{R})$ mit $\delta_w(i) = w$. Natürlichkeit kann bedeuten

a) $\delta_w^* = \delta_w$

b) $\delta_w =$ Dreiecksmatrix.

Kann Bedingung b) auch im Falle des Einheitskreises realisiert werden? Bestimme δ_w^{-1} und $\delta_{-w^{-1}}$.

Aufgabe 29. (4 Punkte)
Finde für jedes $z \in \mathbb{B}$ explizit (wie oben) eine "Symmetrie" $\sigma_z \in G_{\mathbb{B}}$ mit den Eigenschaften

$$\sigma_z^2 = \mathrm{id}\ , \quad \sigma_z \neq \mathrm{id}$$
$$\sigma_z(z) = z \qquad \text{(Fixpunkt).}$$

Ist diese Symmetrie eindeutig bestimmt? Berechne $\sigma_z'(z)$.

Aufgabe 30. (4 Punkte)
Finde analog zu $w \in \mathbb{H}$ eine Symmetrie $\tau_w \in G_{\mathbb{H}}$ mit den Eigenschaften

$$\tau_w^2 = \mathrm{id}\ , \quad \tau_w \neq \mathrm{id}$$
$$\tau_w(w) = w \qquad \text{(Fixpunkt).}$$

Untersuche auf Eindeutigkeit und bestimme $\tau_w'(w)$. Kann τ_w als Dreiecksmatrix gewählt werden?