Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis
– Blatt 10 –
Abgabe Donnerstag, 1.7.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 35. (4 Punkte)
Die Gruppe $G = SU_2(\mathbb{C})$ operiert transitiv auf $\mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$.

(i) Finde für jedes $z \in \mathbb{C}$ eine Symmetrie $\sigma_z \in G$ mit $\sigma_z^2 = \mathrm{id}$ und $\sigma_z(z) = z$ als isolierter Fixpunkt.

(ii) Hat σ_z noch einen weiteren Fixpunkt?

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Ein *Großkreis* in $\mathbb{S}$ ist ein Schnitt $C_H = \mathbb{S}^2 \cap H$, wobei $H \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Nullpunkt ist. Beweise: Die Gruppe G operiert transitiv auf der Menge aller Großkreise. Welche Untergruppe von G stabilisiert einen festen Großkreis C_H

(i) als Menge, d.h. $g(C_H) = C_H$ für alle $g \in G$,

(ii) sogar punktweise, d.h. $g|_{C_H} = \mathrm{id}$ für alle $g \in G$?

Aufgabe 37. (4 Punkte)
Für einen Großkreis $C_H = \mathbb{S}^2 \cap H$ fixiere einen Einheitsvektor $A \in H$ und einen Einheitsvektor $B \in H^\perp$. Bestimme mit Hilfe von A und B eine Parametrisierung $t \mapsto \gamma(t) \in C_H$ mit konstanter Länge $\|\dot\gamma(t)\| = 1$. Was ergibt sich speziell für den Äquator $C = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{C}$ in der z-Ebene $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$.

Aufgabe 38. (4 Punkte)
Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ sei

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

die Bogenlänge. Eine *Geodäte* ist eine Kurve minimaler Bogenlänge, d.h. für eine differenzierbare Kurvenschar $\gamma_s(t) = \gamma(t, s)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, $t \in [a, b]$ und

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \gamma(t) \\ \gamma_s(a) &= \gamma(a), \ \gamma_s(b) = \gamma(b) \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) = 0.$$

(i) Drücke diese Beziehung durch Differentialgleichungen 2. Ordnung für $\gamma(t)$ aus.

(ii) Zeige, dass die "konstante" Parametrisierung eines Großkreises C_H diese Differentialgleichung löst.

(iii)* Zeige umgekehrt, dass jede Lösung, bei Wahl der konstanten Parametrisierung, einem Großkreis entspricht.