

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 2 –

Abgabe Montag, 6.11.2006, 9.00 - 9.10 Uhr vor HG 4

Aufgabe 5 (4 Punkte). Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ Abbildungen mit $g \circ f = \text{Id}_X$ und $f \circ g = \text{Id}_Y$. Folgern Sie daraus

- f ist injektiv (Beweis-Struktur: Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Dann gilt ...
 $x = x'$).
- f ist surjektiv (Beweis-Struktur: Sei $y \in Y$. Wähle $x = \dots$, dann ist $f(x) = y$).

Aufgabe 6 (3 Punkte).

- Geben Sie auf $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ eine Addition und Multiplikation an, so dass \mathbb{Z}_2 damit ein Körper wird und überprüfen Sie exemplarisch das Distributivgesetz.
- Auf $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ sei eine Addition \oplus analog zu \mathbb{Z}_3 definiert und die Multiplikation durch

$$a \odot b := a \oplus \dots \oplus a \text{ mit } b \text{ Summanden.}$$

Ist \mathbb{Z}_4 damit ein Körper?

Aufgabe 7 (5 Punkte). Es sei $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit folgender Verknüpfung:

$$\star \quad G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \star (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Zeigen Sie:

- $(a, b) \star (x, y) \in G \quad \forall (a, b), (x, y) \in G$,
- $(1, 0)$ ist neutrales Element von (G, \star) ,
- (G, \star) ist eine abelsche Gruppe.

Bemerkung: Der Körper \mathbb{C} ist die Menge \mathbb{R}^2 mit der Vektoraddition und obiger Multiplikation.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K . Auf $V \times W = \{(v, w) | v \in V, w \in W\}$ werden folgende Verknüpfungen definiert:
Die Addition durch

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$$

und die Multiplikation mit Skalaren durch

$$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w) \quad \forall \lambda \in K, v \in V, w \in W.$$

Überprüfen Sie, dass damit $V \times W$ ein Vektorraum über K ist.

Zur Bezeichnungswut der Mathematiker

When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who – well, if he broke his head, then his girl – not the other fellow's, but the fellow who was the — Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.

Morris Kline, *Mathematics in Western Culture*, 1872, zitiert nach Heuser, 1991, S. 13