

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 3 –

Abgabe Montag, 13.11.2006, 9.00 - 9.10 Uhr vor HG 4

(*)-Aufgaben zählen zum Haben, aber nicht zum Soll.

Aufgabe 9 (6 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. von \mathbb{R}^2 , welche nicht? (mit Begründung!)

- a) $M_1 := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$
- b) $M_2 := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$
- c) $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$
- d) $M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$

Skizzieren Sie die Mengen M_3 und M_4 .

***Aufgabe 10** (4 Punkte). Sei V ein K -Vektorraum und U und W Untervektorräume von V . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$A : U \cup W \text{ ist Untervektorraum von } V,$$
$$B : U \subset W \text{ oder } W \subset U.$$

Hinweis: $A \Rightarrow B$ kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen:
Man leitet aus der Annahme „ A gilt und B gilt nicht“ einen Widerspruch her.

Aufgabe 11 (5 Punkte). Sei $V := \text{Abb}(X, K)$, $z \in X$ fest und

$$U := \{h : X \rightarrow K \mid h(z) = 0\}.$$

Zeigen Sie:

- a) U ist Untervektorraum von V
- b) Durch
$$\phi : V/U \rightarrow K, \ f + U \mapsto f(z)$$
ist eine Abbildung definiert (was ist zu zeigen?)
- c) ϕ ist bijektiv.

Aufgabe 12 (5 Punkte). Begründen oder widerlegen Sie:

- a) Die Vektoren $x = (1, 1, -1)$, $y = (1, -1, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$ im \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig.
- b) Ist V ein K -Vektorraum, $u, v, w \in V$ mit u und v , v und w , u und w sind linear unabhängig, so sind auch u, v, w linear unabhängig.
- c) Ist V ein K -Vektorraum, $u, v, w \in V$ linear unabhängig, so sind auch $u + v$, $v + w$, $u + w$ linear unabhängig.

“The unexpected hanging”

In einem Mathekurs, der täglich (auch am Wochenende!) stattfindet, kündigt der Prof am Sonntag an, dass nächste Woche ein unerwarteter Test geschrieben wird: “Sie werden am Abend vorher nicht wissen, ob der Test am nächsten Morgen stattfindet”.

Die logisch geübten Studierenden schließen messerscharf, dass der Test am nächsten Sonntag nicht stattfinden kann (sonst ...), und folgern induktiv, dass der Test garnicht stattfinden kann.

Zu ihrer Überraschung findet völlig unerwartet der Test am Mittwochmorgen statt.

Wo und bei wem liegt der Fehler?

Erhellende Beiträge werden mit unerwarteten Extrapunkten belohnt.