Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 4 –

Abgabe Montag, 20.11.2006, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

($*$)-Aufgaben zählen zum Haben, aber nicht zum Soll.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K, $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W.
Zeigen Sie, dass $\big((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\big)$ eine Basis von $V \times W$ ist.

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei V ein reeller Vektorraum und $w_1, w_2, w_3, w_4 \in V$. Sei

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
v_1 & = & w_1 & + & w_2 & + & w_3 & + & w_4 \\
v_2 & = & 2w_1 & + & 2w_2 & + & w_3 & - & w_4 \\
v_3 & = & w_1 & + & w_2 & + & 3w_3 & - & w_4 \\
v_4 & = & 2w_1 & & & - & w_3 & + & w_4 \\
v_5 & = & & - & w_2 & + & w_3 & - & w_4
\end{array}$$

Man beweise, dass $(v_1, \dots, v_5)$ linear abhängig ist.
Man kann diese Aufgabe dadurch lösen, dass man eines der v_i als Linearkombination der anderen vier darstellt. Es gibt aber auch einen Beweis, bei dem man überhaupt nicht zu rechnen braucht!

Aufgabe 15 (4+3 Punkte). Es sei Π_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Für $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sei $L_j \in \Pi_n$ das zugehörige *Lagrange-Polynom*,

$$L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \, .$$

a) Zeigen Sie: $(L_0, \dots, L_n)$ ist eine Basis von Π_n.
(Hinweis: $L_j(x_m) = 1$ für $j = m$, ansonsten Null).

*b) Geben Sie eine konkrete Darstellung von $p \in \Pi_n$ durch obige Basis an, und folgern Sie daraus:
Stimmen $p, q \in \Pi_n$ in $n+1$-Punkten überein, so sind sie gleich.
Wieviele verschiedene Nullstellen kann $p \in \Pi_n \setminus \{0\}$ höchstens haben?

Aufgabe 16 (4 Punkte). Es sei

$$\begin{array}{rcl}
U & := & \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \\
W & := & \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = 0\}
\end{array}$$

Zeigen Sie: U ist ein 2-dimensionaler, W ein 1-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie jeweils eine Basis an. Sind U und W komplementäre Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

The Unexpected Hanging

Trotz vieler Beiträge anderer scharfsinniger Autoren eine persönliche (und sicher nicht die letzte) Auflösung: Der Widerspruch beruht auf einer unterschiedlichen Interpretation von "unerwartet":

Die Schlussfolgerung der Studenten lautet: Wenn der Test unerwartet stattfinden soll, so kann er garnicht stattfinden, oder gleichbedeutend:

Findet der Test statt, so kann er nicht unerwartet stattfinden.
Unter der Voraussetzung, dass der Test stattfindet, behauptet

Der Professor: Der Test findet unerwartet statt,
der Student: Der Test kann nicht unerwartet stattfinden.

Man schließt eine kleine Wette darüber ab, wer nun recht hat, und da es dabei um Geld oder Ehre geht, ist man genötigt, die Spielregeln zu präzisieren. Ob der Test erwartet oder unerwartet stattfindet, kann nur von den Studenten geklärt werden. Was also muss der Student tun, um die Wette zu gewinnen: Er muss an einem Abend (bevor der Test stattgefunden hat), feststellen: "Der Test findet am nächsten Morgen statt". Dies lässt sich sicherlich nicht mit Bestimmtheit vorhersagen, der Student wird nur zufällig einen Treffer landen und damit ist seine These nicht haltbar.

Woher kommt aber der Widerspruch und was sind alternative Thesen. Bezeichnen wir die studentische Interpretation von unerwartet mit "S-unerwartet", so besagt seine Schlussweise:
Die Klausur kann nicht am Sonntag stattfinden, da dieser ausscheidet; auch nicht am Samstag u.s.w., also an keinem Tag.
Die Wette auf S-unerwartet wäre also an jedem Tag nein,
S-erwartet bedeutet dann aber: Mindestens eine Prognose ist ja, es kann demnach auch an jedem Abend der Test vorhergesagt werden. Mit dieser Interpretation gewinnt natürlich der Student die Wette, fraglich ist nur, ob der Prof sich auf die Spielregeln einlässt.

Literatur: M. Gardner, Further Mathematical Diversions, Allen & Unwin