Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 5 –

Abgabe Montag, 27.11.2006, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

Aufgabe 17 (4 Punkte). Es seien

$$\begin{aligned} U_g &:= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\} \\ U_u &:= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

die Menge der geraden bzw. ungeraden Funktionen. Zeigen Sie:

a) U_g und U_u sind Untervektorräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) $U_g \oplus U_u = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Hinweis: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ eine gerade Funktion.

Aufgabe 18 (4 Punkte). Sei $T : V \to W$ linear. Zeigen Sie:
T ist genau dann injektiv, wenn für jedes linear unabhängige n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ auch $\big(T(v_1), \ldots, T(v_n)\big) \in W^n$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 19 (3 Punkte). Existieren lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

a) $\mathrm{Kern}(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1\}$;

b) $\mathrm{Bild}(T) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y_1 - 3y_2 = 0\}$;

c) $T\big(\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}\big) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}$?

Aufgabe 20 (5 Punkte). Sei $V := \mathit{Abb}\,(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_j \in \mathbb{R} \;\; \forall\, j \in \mathbb{N}\}$ der Vektorraum aller reeller Zahlenfolgen und $S, T : V \to V$ definiert durch

$$\begin{aligned} S((a_0, a_1, a_2, \ldots)) &:= (a_1, a_2, a_3, \ldots), \\ T((a_0, a_1, a_2, \ldots)) &:= (0, a_0, a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß $S, T \in \mathit{Hom}\,(V)$.

b) Untersuchen Sie S und T auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie die Kerne von S und T und die Bilder von S und T.

c) Zeigen Sie, daß $T \circ S$ und $S \circ T$ Projektionen sind. Dabei heißt $P \in \mathit{Hom}\,(V)$ eine Projektion, wenn $P^2 := P \circ P = P$ ist.

b/w

Zur Entwicklung des Dimensionsbegriffs

Erste Ansätze einer (geometrischen) Dimensionsbeschreibung finden sich bereits in den „Elementen“ des Euklid aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. Diese erstaunliche 13-bändige Abhandlung war bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meist verbreitete Werk der Weltliteratur, obwohl (oder weil) es die Mathematik der damaligen Zeit in höchst konzentrierter Form enthält: Es besteht ausschließlich aus Definitionen, Axiomen und Theoremen, ohne irgendeinen erläuternden Text.

I. Buch.

Definitionen.

1. ***Ein Punkt ist, was keine Teile hat,***
2. ***Eine Linie breitenlose Länge.***
3. ***Die Enden einer Linie sind Punkte.***
4. ***Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkt'en auf ihr gleichmäßig liegt.***
5. ***Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.***
6. ***Die Enden einer Fläche sind Linien.***
7. ***Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.***

Der Dimensionsbegriff in jetziger Form ist erstmalig in der zweiten Ausgabe der „Ausdehnungslehre“ von Hermann Grassmann zu finden, die „numerisch ableitbaren Größen“ sind in neuer Terminologie gerade die Linearkombinationen.

ERSTEN BANDES ZWEITER THEIL:

DIE AUSDEHNUNGSLEHRE VON 1862.

IN GEMEINSCHAFT

MIT

HERMANN GRASSMANN DEM JÜNGEREN

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL. 582

§ 2. **Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen.**

14. Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen $a_1, \dots a_n$), und zwar nenne ich es ein Gebiet n-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe (das heisst, aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, *und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt.* Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe.

7 Anm. Das Gebiet erster Stufe ist also die Gesammtheit der Vielfachen einer Grösse erster Stufe, wenn man nämlich unter *Vielfachem einer Grösse* jedes Produkt der Grösse mit einer reellen Zahlgrösse versteht.