Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 7 –

Abgabe Montag, 11.12.2006, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

Aufgabe 25 (3 Punkte). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $P \in \mathrm{Hom}(V)$ eine Projektion. Zeigen Sie: Es gibt eine Basis $B_V = (v^1, \ldots, v^n)$ von V, so dass die Matrixdarstellung $A = M(P; B_V, B_V)$ folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Was gibt die Anzahl der 1-en in der Diagonale an?

Aufgabe 26 (6 Punkte). $Q \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ heißt ein *verallgemeinertes magisches Quadrat*, Bez. $Q \in M^n$, wenn die Summe der Koeffizienten in jeder Zeile, Spalte und den beiden Diagonalen, den gleichen Wert ergibt. Dieser Wert heißt *Quadratsumme* von Q.

a) Begründen Sie, dass M^n ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass es im Fall $n = 3$ für alle Zahlen $a_1^1 =: a$, $a_2^1 =: b$, $a_1^2 =: c$ eindeutige Koeffizienten a_j^k gibt, so dass $(a_j^k) \in M^3$ mit Quadratsumme $S = \frac{1}{4}(6a + 3b + 3c)$ ist. Geben Sie diese Koeffizienten an.

*c) Zeigen Sie, dass $\dim M^3 = 3$ gilt.

d) Geben Sie eine Basis von M^3 an und stellen Sie damit das „Loh-Shu“-Quadrat $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dar.

Aufgabe 27 (3 Punkte). Sei $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to L^*$, $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie: φ ist ein *Gruppenhomomorphismus*, d.h.

$$\varphi(z \cdot w) = \varphi(z) \cdot \varphi(w) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

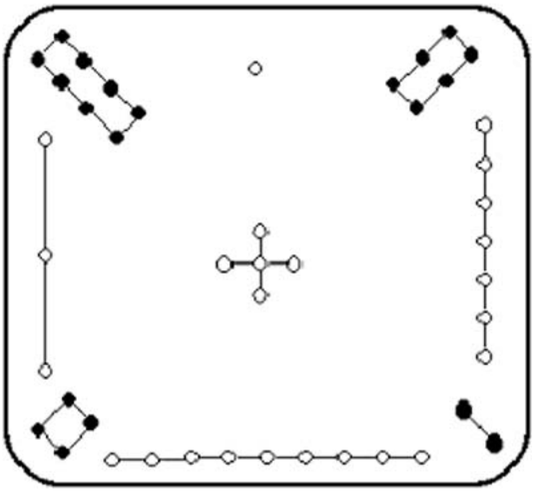
Aufgabe 28 (4 Punkte). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: $S_\alpha\, S_\beta$ ist eine Drehung und bestimmen Sie S_α^{-1}.
(Hinweis: $\sin(-\beta) = -\sin\beta$).

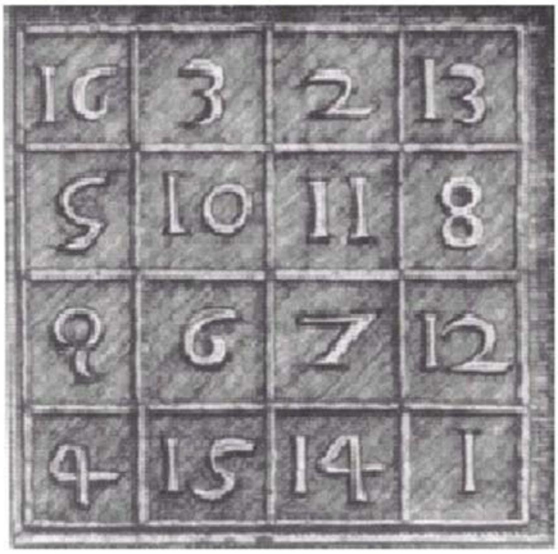
b) Sei $v^1 := \binom{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$, $v^2 := \binom{\sin(\alpha/2)}{-\cos(\alpha/2)}$. Berechnen Sie $S_\alpha\, v^1$ und $S_\alpha\, v^2$, und geben Sie eine kurze Interpretation des Resultats.

Magische Quadrate

Ein (klassisches) magisches Quadrat ist eine $n \times n$-Matrix, deren Koeffizienten aus den Zahlen 1 bis n^2 bestehen, so dass in jeder Zeile, Spalte und den Diagonalen die Summe jeweils den gleichen Wert, nämlich $(n^3 + n)/2$ ergibt.



Das älteste bekannte magische Quadrat ist das berühmte Loh-Shu Quadrat aus China, das in der Zeit zwischen 4000 bis 2000 vor Chr. entstanden ist, eine Quelle datiert es auf 2800 v. Chr.
Bis auf Drehungen und Spiegelungen ist es auch das einzige magische Quadrat der Ordnung 3.



Das berühmteste magische Quadrat stammt aus Albrecht Dürers Kupferstich Melancholia I.
Bemerkenswert ist hier, dass nicht nur Zeilen, Spalten und Diagonalen immer dieselbe Summe liefern (34), sondern auch jeder der vier Quadranten - also $16 + 3 + 5 + 10 = 34$, $2 + 13 + 11 + 8 = 34$, usw. - die vier Zentrumsfelder ($10 + 11 + 6 + 7 = 34$) und die vier Eckfelder ($16 + 13 + 4 + 1 = 34$). Dürer stach das Bild im Jahre 1514, was ihm Anlass war, das auch im magischen Quadrat festzuhalten.

Der Vektorraum der verallgemeinerten magischen Quadrate (vgl. Aufgabe 22) der Ordnung 4 ist 8-dimensional, er enthält als Teilmenge genau 880 wesentlich verschiedene klassische magische Quadrate.

Magische Quadrate höherer Ordnung gibt es schon seit dem frühen Mittelalter, der Rekord aus dem Jahr 1994 ist ein 3001×3001 Quadrat. In den höheren Ordnungen sind jedoch noch viele Fragen offen, z.B. ist die Anzahl der klassischen magischen Quadrate der Ordnung 6 unbekannt.

Quellen: Wikipedia und andere Internetseiten