Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 8 –

Abgabe Montag, 18.12.2006, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

Aufgabe 29 (3 Punkte). $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar $\iff$ $A^t\,A$ ist invertierbar.

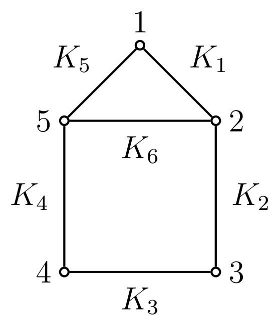
Aufgabe 30 (5 Punkte). Ein (einfacher) Graph G besteht aus einer Menge $\{1,\dots,n\}$ von n Ecken, einer Menge $\{K_1,\dots,K_m\}$ von m Kanten und einer injektiven Abbildung g, die jeder Kante K genau zwei verschiedene Ecken j und k zuordnet ("K verbindet j und k"). Ist G ein Graph, so heißt $A = (a_j^k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$a_j^k := \begin{cases} 1, & \text{es gibt (genau) eine Kante } K\text{, die } j \text{ und } k \text{ verbindet.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenz-Matrix* von G und $B = (b_\ell^k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$b_\ell^k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ Endpunkt der Kante } K_\ell \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die *Inzidenz-Matrix* von G.



a) Geben Sie für den neben stehenden Graphen mit 5 Ecken und 6 Kanten die Adjazenz- und Inzidenz-Matrizen A und B an.

b) Skizzieren Sie einen möglichst übersichtlichen Graphen, der folgende Adjazenz-Matrix hat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie allgemein, dass für die Adjazenz- und Inzidenz-Matrizen A, B eines jeden Graphen G gilt

$$A = B^t\,B - D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie eine Interpretation für die Diagonalelemente von D.

Aufgabe 31 (4 Punkte). Gegeben seien die Vektoren

$$z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad z^2 = \begin{pmatrix} \lambda i \\ \lambda \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad z^3 = \begin{pmatrix} \lambda i \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ i \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad z^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

aus $\mathbb{C}^4$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ sei. Bestimmen Sie (in *einer* Rechnung)

a) die Menge $M = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Span}(z^1, \ldots, z^5) \subsetneqq \mathbb{C}^4\}$

b) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein maximales Teiltupel linear unabhängiger Vektoren.

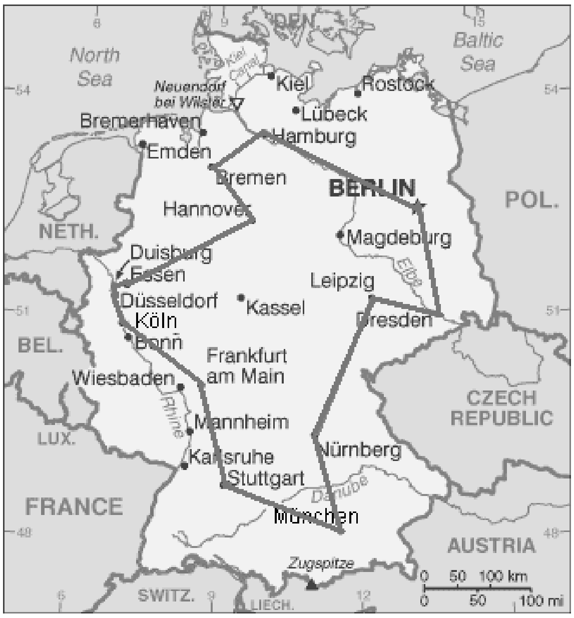
Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Für welche Vektoren b^k ist das LGS $Ax = b^k$ lösbar? Ist, im Falle der Lösbarkeit, die Lösung eindeutig? (Es genügt *eine* Rechnung.)

Problem des Handlungsreisenden

Das Problem des Handlungsreisenden (engl. Traveling Salesman Problem, TSP) ist ein Graphenproblem, bei dem die Kanten als Verbindungsstrecken zwischen zwei Orten nach der Entfernung gewichtet sind. Die Aufgabe besteht darin, eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu wählen, dass die gesamte Reisestrecke des Handlungsreisenden nach der Rückkehr zum Ausgangsort möglichst kurz ist.



Das nebenstehende Bild zeigt den optimalen Reiseweg eines Handlungsreisenden durch die 15 größten Städte Deutschlands. Der Weg ist der kürzeste von 43 589 145 600 möglichen.

Das Problem des Handlungsreisenden hat schon in seiner Reinform viele praktische Anwendungen, beispielsweise in der Tourenplanung, in der Logistik oder im Design von Mikrochips. Noch häufiger tritt es allerdings als Unterproblem auf, wie z.B. bei der Verteilung von Waren, bei der Planung von Touren eines Kunden- oder Pannendienstes oder bei der Genom-Sequenzierung.

Neben der einfachen Definition und Verständlichkeit der Aufgabenstellung zeichnet sich das Problem des Handlungsreisenden dadurch aus, dass die Bestimmung guter Lösungen vergleichsweise leicht ist, während das Finden einer beweisbar optimalen Lösung sehr schwer ist. Erst durch hoch entwickelte mathematische Methoden und den Einsatz aller verfügbaren Rechenleistung ist es gelungen, auch große Probleme exakt zu lösen. Im Jahre 2005 berechnete Cook in Zusammenarbeit mit anderen eine beweisbar kürzeste Tour durch die 33.810 „Städte“ eines Layoutproblems für integrierte Schaltkreise, was das bislang größte optimal gelöste TS-Problem ist. Für andere Probleme mit mehreren Millionen Städten konnten sie mit Hilfe zusätzlicher Dekompositionstechniken Touren bestimmen, deren Länge beweisbar weniger als 1% vom Optimum entfernt liegt.