Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 10 –

Abgabe Montag, 15.1.2007, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

Aufgabe 37 (3 Punkte). Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix in spezieller *Blockform*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $A_{11} \in K^{p\times p},\ A_{12} \in K^{p\times q},\ A_{22} \in K^{q\times q}$ und $p+q=n$.
Zeigen Sie (z.B. mit dem Gauß-Algorithmus)

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

Welcher Satz der Vorlesung wird damit verallgemeinert?

Aufgabe 38 (5 Punkte). Sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie induktiv:

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1\leq j<k\leq n} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Hinweis: Subtrahiere das λ_1-fache der $(n-1)$-ten Spalte von der n-ten, das λ_1-fache der $(n-2)$-ten von der $(n-1)$-ten, ... und folgere mit der Laplace-Formel

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \Delta(\lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Aufgabe 39 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.
Zeigen Sie:

a) $\det A \in \mathbb{Z}$,

b) $\exists\ A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \Longleftrightarrow |\det A| = 1$.

Aufgabe 40 (4 Punkte). V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und der davon erzeugten Norm $\|\cdot\|$. Sei P das von $v, w \in V$ aufgespannte Parallelogramm. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist P ein Rhombus (d.h. v und w sind gleich lang), wenn die Diagonalen $v+w$ und $v-w$ orthogonal sind.

b) Genau dann ist P ein Rechteck (d.h. v und w sind orthogonal), wenn die Diagonalen $v+w$ und $v-w$ gleich lang sind.

Dabei heißen v und w *orthogonal*, wenn $\langle v|w\rangle = 0$ gilt.

Termin für die **Einsicht und Mitnahme der ersten Klausur** ist Donnerstag, der 11.01.07, 16:30-18:30 Uhr in SR II, Lahnberge.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(* 1. Juli 1646 in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover) war Mathematiker, Philosoph, Naturwissenschaftler, Diplomat, Historiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit.

In dem nebenstehenden Ausschnitt eines Briefs von Leibniz an de l'Hospital aus dem Jahr 1663 treten erstmals Determinanten auf. Leibniz diskutiert darin ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Die „Zahlen" 10, 11, ... bzw. $1_0, 1_1, \ldots$ bezeichnen die Koeffizienten $a_{10}, a_{11}, \ldots$ Aus der Lösbarkeit des LGS folgert er, dass die Determinante der erweiterten Matrix Null sein muss (letzter Gleichungsblock, die Zeilen sind jeweils zu addieren).

Erklärungen für die Argumentation von Leibniz werden mit Extrapunkten belohnt.

lieu qu'en me servant des nombres je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose $10 + 11x + 12y = 0$ (1) et $20 + 21x + 22y = 0$ (2) et $30 + 31x + 32y = 0$ (3) ou le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons: $\begin{matrix} +10.22 + 11.22x \\ -12.20 - 12.21.. \end{matrix} = 0$ (4) et par la premiere et troisieme nous aurons: $\begin{matrix} +10.32 + 11.32x \\ -12.30 - 12.31.. \end{matrix} = 0$ (5) ou il est aise de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere antecedent 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{matrix} 1_0 . 2_1 . 3_2 \\ 1_1 . 2_2 . 3_0 \\ 1_2 . 2_0 . 3_1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1_0 . 2_2 . 3_1 \\ 1_1 . 2_0 . 3_2 \\ 1_2 . 2_1 . 3_0 \end{matrix}$$

qui est la derniere equation delivrée des deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies