

## Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 11 –

Abgabe Montag, 22.1.2007, 9.00 - 9.10 Uhr vor HG 4

**Aufgabe 41** (3 Punkte). Zu  $x, y \in \mathbb{R}^3$  (mit dem Standard-Skalarprodukt) sei

$$x \times y \in \mathbb{R}^3, \quad (x \times y)_j := \det(x, y, e^j), \quad j = 1, 2, 3$$

das *Kreuzprodukt*. Zeigen Sie:

- $x \times y \perp x$  und  $x \times y \perp y$ ,
- $x \times y \neq 0 \iff x$  und  $y$  sind linear unabhängig.

**Aufgabe 42** (5 Punkte). Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei

$$\text{Spur } A := \sum_{j=1}^n a_j^j.$$

Zeigen Sie: Auf  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist durch  $(A, B) \mapsto \text{Spur}(AB^t)$  ein Skalarprodukt definiert.

**Aufgabe 43** (4 Punkte). Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle | \rangle$  und davon erzeugter Norm  $\| \cdot \|$ . Zeigen Sie

- $\langle v | w \rangle = 0 \implies \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ .
- Ist  $U \oplus U^\perp = V$ ,  $P_U$  die orthogonale Projektion auf  $U$ , so ist

$$\|v - u\|^2 \geq \|v - P_U v\|^2 \quad \forall v \in V, u \in U.$$

- Geben Sie eine kurze geometrische Deutung von a) und b).

**Aufgabe 44** (4 Punkte). Es sei  $\mathbb{R}^4$  versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt,

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + \dots + x_4 = 0\} \quad \text{und} \quad y := (1, 2, 3, 4).$$

Berechnen Sie die orthogonale Projektion  $P_U y$  und  $U^\perp$ .

**\*Aufgabe 45** (3 Punkte). Es sei  $V := \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$$

(vgl. Beisp. 8.2). Orthonormieren Sie die Vektoren  $q^0, q^1, q^2$  mit  $q^j : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^j$ .

## Ein Kommentar zu dem Leibniz-Brief an l'Hôpital (Rückseite Blatt 10)

Leibniz gibt keine Begründung, wie aus (4) und (5) die nachfolgende Formel entsteht, diese wohl absichtlichen "Lücken" treten in seinen Schriften häufiger auf.

In neuer Notation besagt (4) und (5)

$$\begin{aligned} a_{10} \cdot a_{22} - a_{12} a_{20} + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x &= 0 \\ a_{10} \cdot a_{32} - a_{12} a_{30} + (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) x &= 0 \end{aligned}$$

und die daraus gefolgerte Gleichung

$$\det B = 0, \text{ wobei } B = (a^0, a^1, a^2) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ ist.}$$

Die Schlussfolgerungen von Leibniz dürften wohl ungefähr die folgenden gewesen sein: Durch Substitution von  $x$  aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$(a_{10} a_{22} - a_{12} a_{20})(a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) = (a_{10} a_{32} - a_{12} a_{30})(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}).$$

Von den acht Summanden tritt  $a_{10} a_{22} a_{11} a_{32}$  auf beiden Seiten auf, aus den übrigen lässt sich  $a_{12}$  ausklammern. Man erhält

$$\begin{aligned} & a_{12} (a_{20} a_{12} a_{31} + a_{10} a_{32} a_{21} + a_{30} a_{11} a_{22}) \\ = & a_{12} (a_{20} a_{11} a_{32} + a_{10} a_{22} a_{31} + a_{30} a_{12} a_{21}) \end{aligned}$$

und damit

$$a_{12} \cdot \det B = 0.$$

Durch Vertauschung der Zeilen folgt auch

$$a_{22} \cdot \det B = a_{32} \cdot \det B = 0.$$

Damit ist  $\det B = 0$  oder  $a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0$ , also auch  $\det B = 0$ .

Im Anschluss an die Determinantenformel stellt Leibniz noch deren "Harmonie" fest und hebt hervor, dass eine allgemeine Formel sehr wünschenswert wäre. Er hofft, diese zu finden, aber die Rechnungen bei mehr Variablen werden sehr kompliziert.

Aus heutiger Sicht lässt sich das Resultat von Leibniz ohne jede Rechnung herleiten: Die Koeffizientenmatrix  $A$  für das LGS ist eine  $3 \times 2$ -Matrix, hat also  $\text{Rang} \leq 2$ , da das LGS als lösbar angenommen wird, hat die erweiterte Matrix  $B$  ebenfalls  $\text{Rang} \leq 2$ , also ist  $\det B = 0$ .

Der Adressat des Briefes, der Marquis de l'Hôpital, hat es in der Wissenschaftsgeschichte durch einen wohl einmaligen Vorgang zu zweifelhaftem Ruhm gebracht. Die von ihm publizierten Ergebnisse (auch die nach ihm benannte Grenzwertformel) stammen im Wesentlichen alle von Johann Bernoulli, der sich ihm in einem Vertrag gegen gutes Geld wissenschaftlich verkauft hatte. Alle Resultate von Bernoulli standen dem Marquis zur Verfügung, Bernoulli durfte selbst nicht publizieren. Leibniz war übrigens der Handel bekannt (<http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli/biographie/vertrag.html>).