Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 12 –

Abgabe Montag, 29.1.2007, 9.00 - 9.10 Uhr **vor** HG 4

Aufgabe 46 (4 Punkte). Sei $C \in \mathrm{U}(n)$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$ und $A := C^* D\, C$.

a) Zeigen Sie: A ist normal.

b) Für welche D ist $A \in \mathrm{U}(n)$?

Aufgabe 47 (4 Punkte). Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_s = 1$ und

$$S_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x - 2\,\langle x|y\rangle_s\, y\ .$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert eine ONB $(y^1, \ldots, y^n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass S_y in dieser Basis Diagonalform hat.

b) $S_y \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det S_y = -1$.

***Aufgabe 48** (4 Punkte). Es sei $(V, \langle\,|\,\rangle)$ ein n-dimensionaler Skalarproduktraum. Zeigen Sie: Zu jedem $\eta \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ existiert genau ein $w \in V$ mit

$$\eta(v) = \langle v|w\rangle \quad \text{für alle } v \in V\ .$$

Hinweis: ONB.

Aufgabe 49 (6 Punkte). Es sei $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und für $x,\, y \in \mathbb{R}^2$

$$\langle x|y\rangle := \langle Cx|y\rangle_s\ .$$

a) Zeigen Sie: Durch $\langle\,|\,\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

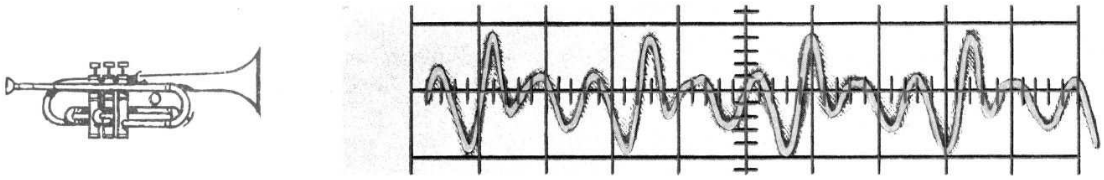
b) Geben Sie eine ONB $\mathcal{B} = (v^1, v^2)$ von $\mathbb{R}^2$ bzgl. dieses Skalarproduktes an und berechnen Sie für

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

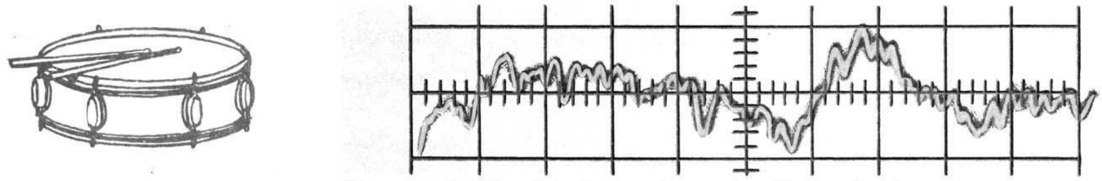
die Matrixdarstellung $A = M(T; \mathcal{B})$.

c) Berechnen Sie $T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

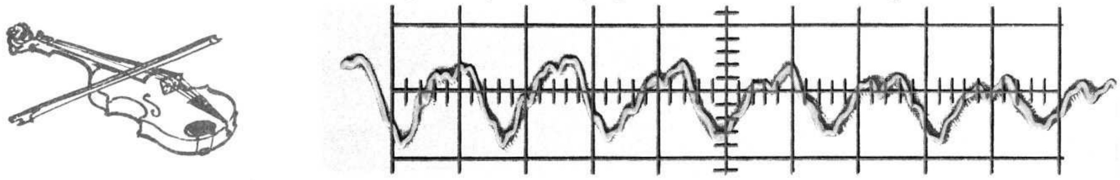
Die schwingende Saite
– ein interdisziplinäres Thema –



Schwingungskurve (Oszillogramm) eines Trompetentons



Die unregelmäßige Schwingungskurve eines Trommelschlags



Obwohl der Geigenton eine gezackte Kurve hat, ist sein Klang keineswegs ruckartig oder heftig.

Ausgangspunkt ist das unterschiedliche Klangspektrum von Musikinstrumenten. Die genaue Analyse erfordert tiefere mathematische Theorien, am Beispiel einer Geigensaite (oberes Bild) sollen dennoch die wichtigsten Schritte erläutert werden.

Physikalische Gesetzmäßigkeiten führen zur Aufstellung der Schwingungsgleichung einer in 0 und π eingespannten Saite. Spezielle Lösungen (reine Schwingungen) sind durch folgende Differentialgleichung gegeben

$$(*) \qquad -u''(x) = \lambda u(x), \;\; x \in [0, \pi], \;\; u(0) = u(\pi) = 0$$

mit einem noch freien Parameter λ.

Die mathematische Analyse beginnt mit der Feststellung, dass $(*)$ eine Eigenwert-Eigenvektor-Gleichung ist. Die Lösungen

$$v_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; \sin nx$$

zu den Eigenwerten $\lambda_n = n^2$ bilden eine (verallgemeinerte) ONB in $\mathcal{C}([0, \pi])$. Die Reihendarstellung der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung enthält die Koeffizienten $\langle g | v_n \rangle$, wobei g die Auslenkung der Saite zur Zeit $t = 0$ beschreibt.

Dies Resultat lässt sich wiederum musikalisch interpretieren: in einer reinen Grundtonschwingung tritt nur der Koeffizient $\langle g | v_1 \rangle$ auf, je stärker der Anteil der Koeffizienten $\langle g | v_n \rangle$ für $n > 1$ und damit der Obertöne ist, desto heller ist der Klang.