Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Lineare Algebra I
– Klausur –
Donnerstag, 21.12.2006, 16:15-18:45 Uhr, Audimax, HG 5

Name, Vorname ______________________________

Matrikelnummer ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zugelassene Hilfsmittel: Merkblatt.
- Bitte überprüfen Sie Name und Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	5	3	4	4	4	4	5	3	32
Erreicht									

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{n\times n}$?

(i) $V_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$.

(ii) $V_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^2 = A\}$.

(iii) $V_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A\}$.

(iv) $V_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \dim \operatorname{Kern} A \geq 1\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $T : V \to W$ linear, $(w_1, \dots, w_n)$ ein Erzeugendensystem von W. Zeigen Sie:

$$T \text{ ist surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Zu jedem } w_j \text{ existiert ein } v_j \in V \text{ mit } Tv_j = w_j.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien $f_1, \dots, f_n \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v_j = \begin{pmatrix} f_j(t_1) \\ \vdots \\ f_j(t_n) \end{pmatrix} \ , \ j = 1, \dots, n$$

lineare unabhängig sind. Zeigen Sie, dass dann auch $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2\,x_2 + \ldots + n\,x_n = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Dimension von U und geben Sie einen Untervektorraum U' von $\mathbb{R}^n$ an mit $U \oplus U' = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Gegeben sei die Basis $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$ und $U := \operatorname{Span}(v^1,\, v^2)$. Bestimmen Sie für die Abbildungen

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

und

$$S : U \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

jeweils die Matrixdarstellungen $A := M(T;\, (v^1,\, v^2,\, v^3),\, \mathcal{B}^2)$ und $B := M(S;\, (v^1,\, v^2),\, \mathcal{B}^2)$, wobei $\mathcal{B}^2$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ und $\dim \operatorname{Kern} B = s$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Rang} A\,B \leq p - s\ .$$

Aufgabe 7 (5 Punkte). Es sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

a) Bestimmen Sie von $\operatorname{Bild} A$ und von $\operatorname{Kern} A$ jeweils eine Basis.

b) Zeigen Sie, dass A eine Projektion ist.

c) Was folgt aus b) für die Dimension von $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Bild} A$?

Aufgabe 8 (3 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Berechnen Sie $\operatorname{Kern} A$ und die Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ von $Ax = b$.