Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Lineare Algebra I

– Klausur 2 –

Freitag, 09.02.2007, 14:15-16:45 Uhr, Audimax, HG 4

Name, Vorname ______________________________

Matrikelnummer ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zugelassene Hilfsmittel: Merkblatt.
- Bitte überprüfen Sie Name und Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	3	4	4	3	5	4	3	4+2	32
Erreicht									

Aufgabe 1 (3 Punkte). Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ b_1 & c_2 & d_3 & 0 \\ c_1 & d_2 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $a_j,\, b_j,\, c_j,\, d_j \in K$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Orthonormieren Sie

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

bezüglich des Standard-Skalarproduktes des $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei V ein Skalarproduktraum, U ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis $(u^1, \ldots, u^m)$ und P_U die orthogonale Projektion auf U. Zeigen Sie:

$$\|P_U v\|^2 = \sum_{j=1}^{m} |\langle v|u_j\rangle|^2 \quad \forall\, v \in V.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $\langle\,|\,\rangle_s$ das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{K}^n$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

$$\langle x|y\rangle := \langle Cx|y\rangle_s \qquad \text{mit} \qquad x,\, y \in \mathbb{K}^n$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 5 (5 Punkte). Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^t$. Zeigen Sie:

a) Für das charakteristische Polynom p_A von A gilt $p_A(-\lambda) = (-1)^n p_A(\lambda)$.

b) Ist n ungerade, so gilt $\det A = 0$.

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,.$$

Zeigen Sie $A \in \mathrm{O}(3)$. Liegt A in $\mathrm{SO}(3)$?

Aufgabe 8 (4+2 Punkte). Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Berechnen Sie ein $C \in \mathrm{O}(2)$ mit $C^*AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

b) Begründen Sie, dass es ein $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt mit $B^2 = A$ und berechnen Sie B.