Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2006/07

Lineare Algebra I

– Wiederholungsklausur –

Donnerstag, 29.03.2007, 10:15-12:45 Uhr, Hörsaalgebäude Chemie HS A

Name, Vorname ______________________________

Matrikelnummer ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zugelassene Hilfsmittel: Merkblatt.
- Bitte überprüfen Sie Name und Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	4	3	4	4	3	4	4	3	29
Erreicht									

Aufgabe 1 (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$, welche nicht?

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\}, \\ M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=1\}, \\ M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 0\}, \\ M_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \cdot y = 0\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei U der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Bestimmen Sie die Dimension von U, indem Sie eine Basis von U angeben.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei Π_3 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3,

$$\mathcal{B} := \left\{ p_0(t) = 1 \ , \quad p_1(t) = t \ , \quad p_2(t) = t^2 \ , \quad p_3(t) = t^3 \right\}$$

eine Basis von Π_3 und D die lineare Abbildung, die durch die Ableitung gegeben ist:

$$D : \Pi_3 \to \Pi_3,\ p(t) \mapsto p'(t) \ .$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M\big(D; \mathcal{B}\big)$ von D bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sowie die Dimensionen von Kern und Bild von D.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ .$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie induktiv: Ist n ungerade, so ist $\det A_n = 0$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Es sei $\langle\,|\,\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und U der Untervektorraum

$$U = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3 \ .$$

Bestimmen Sie die Dimension von U und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene positive Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $v^1, \ldots, v^m$ und $U := \mathrm{Span}(v^1, \ldots, v^m)$. Zeigen Sie:

$$\langle Ax|x\rangle > 0 \quad \forall\, x \in U \setminus \{0\} \ ,$$

wobei $\langle\,|\,\rangle$ das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 8 \\ 2 & -5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \ .$$

Prüfen Sie A auf Diagonalisierbarkeit.