Fachbereich Mathematik und Informatik Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. J. Hinz

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 10 –

Abgabetermin: Dienstag, 13.1.2009, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V, W K-Vektorräume mit den Basen $B = \{b_1, b_2\}$ von V und $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$ von W . Die lineare Abbildung $f : V \to W$ habe bzgl. dieser Basen die Matrix

$$A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es sei nun $B^* = \{b^*_1, b^*_2, b^*_3\}$ eine weitere Basis von W mit

$$\begin{aligned} b'_1 &= b^*_1 + 2b^*_2 \\ b'_2 &= -b^*_1 - 2b^*_3 \\ b'_3 &= 3b^*_1 + b^*_2 + b^*_3 \ . \end{aligned}$$

Welche Matrix hat f dann bezüglich der Basen B und B^* ?

2. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Es sei $A = (\alpha_k \cdot \delta_{kl}) \in M(n, n)$ eine Diagonalmatrix mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie:

a) Ist $BA = AB$, so ist $B \in M(n, n)$ eine Diagonalmatrix.

b) Bestimmen Sie alle reellen Matrizen $B \in M(n, n)$ mit der Eigenschaft:

$$BA = AB \quad \text{für } \textbf{alle} \text{ reellen Matrizen } A \in M(n, n) .$$

3. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte) : Bestimmen Sie die Ränge der folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 & \cdots & \alpha_1 + \alpha_n \\ \alpha_2 + \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 + \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n + \alpha_1 & \alpha_n + \alpha_2 & \cdots & \alpha_n + \alpha_n \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe (4 Punkte) : Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen A_1 und A_2 invertierbar? Berechnen Sie A_1^{-1} .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} , \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} .$$

1-te Bonusaufgabe über Weihnachten (maximal 4 Zusatzpunkte möglich) :

Es seien V, W, X endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W,\ g : W \to X$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie die Ungleichungen von *Sylvester*:

$$\operatorname{Rang} f + \operatorname{Rang} g - \dim W \ \leq\ \operatorname{Rang}(g \circ f) \ \leq\ \min(\operatorname{Rang} f, \operatorname{Rang} g) \quad .$$

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Abbildung $g|_{f(V)} : f(V) \to X$, und zeigen Sie die Ungleichung

$$\dim W - \dim f(V) \ \geq\ \dim g(W) - \dim g(f(V)) \text{ .)}$$

2-te Bonusaufgabe über Weihnachten (maximal 6 Zusatzpunkte möglich) :

Ein Tierzuchtbetrieb verwendet Futter, das aus den drei Futtermitteln F_1, F_2, F_3 gemischt wird. Der Anteil (in Mengeneinheiten ME pro kg) der einzelnen Futtermittel an Eiweiss, Kohlehydraten und Fett entnimmt man der folgenden Tabelle:

Futter	**Eiweiss**	**Kohlehydrate**	**Fett**
F_1	2	3	1
F_2	3	2	5
F_3	1	3	1

a) Wieviel Kilogramm von F_1, F_2, F_3 sind für die Mischungen zu verwenden, wenn das Mischfutter 80 ME Eiweiss, 122 ME Kohlehydrate und 45 ME Fett enthalten soll?

b) Ist mit F_1, F_2, F_3 auch ein Mischfutter zu realisieren, das 90 ME Eiweiss, 120 ME Kohlehydrate und 50 ME Fett enthält?

c) Im Winter wird der Eiweissgehalt des Mischfutters auf 85 ME, der Fettgehalt auf 50 ME erhöht, der Kohlehydrateanteil auf 120 ME reduziert. Statt F_2, F_3 werden Futtermittel F_2', F_3' verwendet, die pro Kilogramm nur 1 ME Kohlehydrate enthalten. Wie gross muss der Anteil an F_2' in der Mischung sein, wenn diese mindestens 39 kg F_1 und mindestens 1 kg F_3' enthalten soll?

**FROHE WEIHNACHTEN
UND EIN GUTES
JAHR 2009 !**