Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. J. Hinz Wintersemester 2008/09

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 13 –

Abgabetermin: Dienstag, 3.2.2009, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien $n > 1$, $A = (\alpha_{k\ell}) \in M(n,n)$ und $A^* = (\alpha^*_{\ell k}) \in M(n,n)$ die zu A adjungierte Matrix. Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \det A - (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot (A^*)^T \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

2. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien $\sigma \in S_n$ eine Permutation und

$$f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f_\sigma\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \alpha_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{\sigma(n)} \end{pmatrix} .$$

Welche Eigenwerte von f_σ können nur auftreten?

3. Aufgabe (4 Punkte) : Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie eine reguläre Matrix T so an, dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat.

Hinweise zur 2-ten Teilklausur zur Linearen Algebra I :

1. Die Klausur am 7. Februar 2009 beginnt um 9.15 Uhr im Hörsaalgebäude der Universität und dauert bis 11.45 Uhr.
2. Die Klausurteilnehmer werden - bezogen auf ihre Nachnamen - wie folgt auf die Hörsäle verteilt: (HG 5 - Buchstaben A bis F) , (HG 114 - Buchstaben G bis K) , (AudiMax - Buchstaben L bis Z).
3. Stellen Sie sicher, dass Sie zur Klausur angemeldet und zugelassen sind.
4. Bringen Sie bitte zur Klausur Ihre Ausweispapiere (Studentenausweis und Lichtbildausweis) und ausreichend ($>$ 15 Blatt) Papier mit.
5. Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
6. Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen. Alle Lösungsvorschläge, die bewertet werden sollen, sind - nach Aufgaben sortiert - zusammen mit einem auszufüllenden Deckblatt geheftet in einem Bündel abzugeben.
7. Das Aufgabenblatt darf nach dem offiziellen Ende der Klausur mitgenommen werden.
8. Die Klausurergebnisse (codiert mit den jeweiligen Matrikelnummern) werden auf der passwortgeschützten Vorlesungsseite bekanntgegeben mit Angabe von Ort und Zeit der Einsicht/Abholung der Klausuren.

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur:

1) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ \alpha_1 - 5\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} \quad .$$

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{bzw.} \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

seien gegebene Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ (muss nicht bewiesen werden). Zeigen Sie, dass f linear ist, und bestimmen Sie die Matrix $A(f)$ von f bzgl. der Basen B_1 und B_2 .

2) Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad .$$

3) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \dots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \dots & (n-1)n+2 \\ 3 & n+3 & 2n+3 & \dots & (n-1)n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

4) Es seien U_1, U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V . Zeigen Sie: $(U_1+U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

5) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + \ x_4 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Lösungsmenge mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

6) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für diese Werte von α .

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad .$$

7) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $x - \alpha\, y = 1$, $(\alpha - 1)\, x - 2\, y = 1$ i) eindeutig lösbar, ii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, iii) nicht lösbar?

8) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\det(A+B) = (\det A) + (\det B) \quad \text{für alle } A, B \in M(n,n) \quad \Longleftrightarrow \quad n = 1 \quad .$$

9) Geben Sie zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ eine reguläre Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix darstellt.