Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. J. Hinz Wintersemester 2008/09

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 4 –

Abgabetermin: Dienstag, 11.11.2008, 9 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (1+2+1+1=5 Punkte) : Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Relationen Äquivalenzrelationen auf M sind:

a) $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ :\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1y_2 = x_2y_1$;

b) $M := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}\ :\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1y_2 = x_2y_1$;

c) $M := \{f;\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : f \sim g \quad :\Longleftrightarrow$ Es existiert $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) - g(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) $M := \mathbb{Z}\ :\ m \sim n \quad :\Longleftrightarrow \quad m + n$ ist gerade.

Veranschaulichen Sie in b) die Äquivalenzklassen, indem Sie x, y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deuten.

2. Aufgabe (2 Punkte) : Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $a \in G$. Definieren Sie eine Verknüpfung $*'$ auf G so, dass $(G, *')$ eine Gruppe mit dem neutralen Element a wird.

3. Aufgabe (1,5+1,5+1=4 Punkte) : Für $a, b \in I := (-1, 1) := \{r \in \mathbb{R}\ ;\ -1 < r < 1\}$ sei $a * b := \frac{a+b}{1+ab}$.

a) Zeigen Sie, dass $*$ eine Abbildung von $I \times I$ nach I ist.

b) Zeigen Sie, dass $(I, *)$ eine kommutative Gruppe ist.

c) Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2} * x * \frac{1}{7} = \frac{1}{3}$.

4. Aufgabe (1,5+1,5=3 Punkte) : Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit dem neutralem Element e und

$$M \ := \ \{\, a \in G\ ;\ a * a = e \,\} \quad .$$

Zeigen Sie:

- Ist G kommutativ, so ist M eine Gruppe.
- Ist G die symmetrische Gruppe S_n mit $n \geq 3$, so ist M keine Gruppe.

Zusatzaufgabe (freiwillig, maximal 4 Bonuspunkte möglich) : a) Es sei G eine endliche kommutative Gruppe mit dem neutralen Element e . Zeigen Sie:

$$\prod_{g \in G} g^2 \ = \ e \quad .$$

b) Es sei G eine Gruppe mit dem neutralen Element e . Für alle $a \in G$ gelte $a^2 = e$. Zeigen Sie, dass G kommutativ ist.