Fachbereich Mathematik und Informatik Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. J. Hinz

Übungen zur Linearen Algebra I
– Blatt 5 –
Abgabetermin: Dienstag, 18.11.2008, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (3 Punkte) : Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte man die Abbildungen $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_{a,b}(x) := ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es sei $R := \{f_{a,b} \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Überprüfen Sie, welche Ring-Axiome in $(R, +, \circ)$ bzgl. Addition $+$ und Komposition $\circ$ von Abbildungen erfüllt sind und welche nicht.

2. Aufgabe (2+3=5 Punkte) :
a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ und in der Form $z = r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ dar:

$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i} \quad , \quad \frac{3}{2}\,i - \frac{2+i}{(1-i)^2} \quad .$$

b) Bestimmen Sie jeweils die Menge der komplexen Zahlen $z = a + ib \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\mathrm{Re}\,(z^2) = 0 \quad , \quad 0 < \mathrm{Re}\,(iz) \leq 1 \quad , \quad |z - i| > |z + 1| \quad .$$

Skizzieren Sie diese Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Aufgabe (3 Punkte) : Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ mit reellen Zahlen gegeben durch

i) $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c\,,\ b + d + 1)\ ,\ \alpha \odot (a, b) := (\alpha a\,,\ \alpha b + \alpha - 1)\,;$

ii) $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c\,,\ b + d)\ ,\ \alpha \odot (a, b) := (\alpha a\,,\ b)\,.$

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit diesen Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

4. Aufgabe (3 Punkte) : Es seien U_1, U_2 Unterräume eines K-Vektorraumes V . Zeigen Sie:

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist Unterraum von } V \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subset U_2 \text{ oder } U_2 \subset U_1 \quad .$$