Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. J. Hinz Wintersemester 2008/09

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 6 –

Abgabetermin: Dienstag, 25.11.2008, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (3 Punkte) : Welche der folgenden Mengen U sind Unterräume in den angegebenen Vektorräumen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \alpha = 0 \;\text{ oder }\; \beta = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \;$;
- $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3 \;$;
- $U = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f(x+1) = 2f(x) \;\text{ für alle } x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Aufgabe (3 Punkte) : Es seien M, N nicht-leere Mengen mit $N \subset M$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Abb}(M, N, \mathbb{R}) \;:=\; \{ f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) \; ; \; f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in N \}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie ferner $\mathrm{Abb}(M, N, \mathbb{R}) + \mathrm{Abb}(M, M \backslash N, \mathbb{R})$.

3. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein K-Vektorraum mit der Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $y = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \in V$ mit $\alpha_k \in K$ für $k = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie:

$$\{b_1 - y, \ldots, b_n - y\} \text{ Basis von } V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 1 \; .$$

4. Aufgabe (4 Punkte) : Im komplexen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^3$ seien die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \, ; \; i\alpha - \beta = \gamma \right\} , \quad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \, ; \; i\alpha - i\gamma = \beta \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Zusatzaufgabe (freiwillig, maximal 4 Bonuspunkte möglich) : Gegeben seien die Punkte $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^3$ durch

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} , \; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} , \; d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \; e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \; f = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden G durch die beiden Punkte a und b mit der Geraden G' durch die Punkte c und d . Zeigen Sie, dass der Punkt e auf der Geraden G liegt, der Punkt f jedoch nicht.

Hinweis für Studierende im modularisierten Lehramt:

Beachten Sie bitte das aktualisierte **Merkblatt zu Modulen und Modulprüfungen** unter http://www.uni-marburg.de/fb12/studium/studiengaenge/lehramt/math