Fachbereich Mathematik und Informatik — Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. J. Hinz

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 7 –

Abgabetermin: Dienstag, 2.12.2008, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (1,5+1,5=3 Punkte) : Das sog. Kroneckersymbol δ_{kl} ist für $k, l \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad k = l, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Seien $V := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \; ; \; f \; \text{Abbildung}\}$ und $f_k \in V$ mit $f_k(n) := \delta_{kn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie, ob die Menge $M := \{f_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig ist. Gilt $V = \text{Lin}\, M$?

2. Aufgabe (3 Punkte) : Es seien

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M_1 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und M_2 linear unabhängig sind. Bestimmen Sie alle $a_1 \in M_1$, so dass $M_2 \cup \{a_1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Aufgabe (1+1,5+1,5=4 Punkte) : Gegeben seien im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}_3[x]$ die Teilmengen $U := \{p \in \mathbb{Q}_3[x] \; ; \; p(-1) = 0\}$ und $W := \{p \in \mathbb{Q}_3[x] \; ; \; p(2) = 0\}$.

- Zeigen Sie, dass U und W Unterräume von $\mathbb{Q}_3[x]$ sind.
- Bestimmen Sie Basen für U und W.
- Berechnen Sie die Dimensionen von $U, W, U \cap W$ und $U + W$.

4. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ und $f(a_3) = b_3$ gibt.

Zusatzaufgabe (freiwillig, maximal 4 Bonuspunkte möglich): Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha + \alpha_{12}\beta \\ \alpha_{21}\alpha + \alpha_{22}\beta \end{pmatrix}; \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad 1 \le i, j \le 2.$$

Deuten Sie die Abbildung f geometrisch, falls

a) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$; b) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{21} = 1$;

c) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$; d) $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$.