Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. J. Hinz

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 9 –

Abgabetermin: Dienstag, 16.12.2008, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $X \subset W$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

$$\dim(f^{-1}(X)) \;=\; \dim(X \cap \operatorname{Bild} f) \;+\; \dim(\operatorname{Kern} f) \quad .$$

(Hinweis: Es gilt (Beweis?): $f(f^{-1}(X)) = X \cap \operatorname{Bild} f$. Betrachten Sie die Abbildung $f|_U : U \to W$ mit $U := f^{-1}(X)$.)

2. Aufgabe (1+3+2=6 Punkte) : Es sei $\mathbb{R}_4[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 4 . Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad f(\sum_{k=0}^{4} a_k\, x^k) = \begin{pmatrix} a_0 - 2a_1 + a_2 \\ a_3 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Zeigen Sie, dass f linear ist. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ und eine Basis von $\mathbb{R}_4[x]/\operatorname{Kern} f$. Warum ist der Vektorraum $\mathbb{R}_4[x]/\operatorname{Kern} f$ isomorph zu $\mathbb{R}^3$? Geben Sie einen Isomorphismus an.

3. Aufgabe (4 Punkte) : Die Abbildung $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} -5\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 \\ 3\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} \quad .$$

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{bzw.} \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

seien gegebene Basen des $\mathbb{R}^4$ bzw. des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrix $A(f)$ von f bzgl.

a) B_1 und der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$,

b) B_1 und B_2 .