Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

**Übungen zur Linearen Algebra II**

- Blatt 10 -

**Abgabetermin**: Donnerstag, 9.7.2009, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

**1. Aufgabe** (2 Punkte) : Untersuchen Sie die folgende Matrix auf positive Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 8 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 33 \end{pmatrix} .$$

**2. Aufgabe** (3 Punkte) : Es sei $A \in M(m,n)$ eine reelle Matrix. Zeigen Sie:

$$A^T A \text{ positiv definit} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Rang} A = n \ .$$

**3. Aufgabe** (4 Punkte) : Im $\mathbb{R}^2$ sei bzgl. des Standardkoordinatensystems eine Kurve durch die Gleichung

$$\alpha x_1^2 + 3x_1x_2 + (\alpha - 4)x_2^2 = 1 \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ ,$$

gegeben. Bestimmen Sie ihre Normalform und das zugehörige Koordinatensystem. Für welche Werte von $\alpha$ liegen jeweils Hyperbeln, Paare von Geraden oder Ellipsen vor?

## **Hinweise zur Klausur**:

1. Die Klausur zur "Linearen Algebra II" wird geschrieben am 11.7.2009 im HG 5 des Hörsaalgebäudes (in der Biegenstraße). Sie beginnt um 9.15 Uhr und dauert bis 11.45 Uhr. Überprüfen Sie, ob Sie zur Klausur zugelassen sind.
2. Bringen Sie bitte zur Klausur ausreichend (> 15 Blatt) Papier mit.
3. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
4. Halten Sie Ihre Ausweispapiere bereit (Studentenausweis und Lichtbildausweis).
5. Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
6. Alle Lösungsvorschläge, die bewertet werden sollen, sind - nach Aufgaben sortiert - zusammen mit diesem ausgefüllten Deckblatt geheftet in einem Bündel abzugeben. Das Aufgabenblatt darf nach dem offiziellen Ende der Klausur mitgenommen werden.
7. Die Klausurergebnisse (codiert mit den jeweiligen Matrikelnummern) werden Ende nächster Woche auf der passwortgeschützten Vorlesungsseite bekannt gegeben mit Angabe von Ort und Zeit der Klausureinsicht.
8. Die Wiederholungsklausur zur "Linearen Algebra II" wird geschrieben am 3.9.09 von 9.15 Uhr bis 11.45 Uhr im Hörsaal A der Chemie auf den Lahnbergen.

## Aufgaben zur Klausurvorbereitung:

1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform (die Transformationsmatrix muss nicht angegeben werden) der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

2. Es sei $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Eigenwert der unitären Matrix $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $(\bar{\lambda})^{-1}$ ebenfalls Eigenwert von $A$ ist.

3. Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $f \in L(V, V)$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt .

4. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ normal ist. Geben Sie eine unitäre Matrix $U$ an, so dass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat.

5. Es sei $f$ eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$. Zeigen Sie:

$$f(x, x) = 0 \quad \text{für alle } x \in V \quad \Longleftrightarrow \quad f(x, y) = -f(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in V \quad .$$

6. Es sei $A = (\alpha_{k\ell}) \in M(n, n)$ eine positiv definite symmetrische Matrix. Zeigen Sie:

$$\alpha_{kk} > 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

7. Im $\mathbb{R}^2$ sei bzgl. des Standardkoordinatensystems eine Kurve 2-ten Grades durch die Gleichung

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 20 \;=\; 0$$

gegeben. Bestimmen Sie ihre Normalform und das zugehörige rechtwinklige Koordinatensystem.

8. Es seien $(\mathfrak{B}_1, U_1, h|_{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_1})$ und $(\mathfrak{B}_2, U_2, h|_{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_2})$ affine Unterräume eines affinen Raumes $(\mathfrak{A}, V, h)$. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \quad , \quad \dim \mathfrak{B}_1 = \dim \mathfrak{B}_2 \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 \quad .$$