Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

- Blatt 5 -

Abgabetermin: Donnerstag, **28.5.2009**, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Es sei $A = (\alpha_{kl}) \in M(n,n)$ eine reelle Matrix mit $A = A^T$. Für $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$< a, b > \ := \ \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{kl}\, \alpha_k\, \beta_l \quad .$$

Zeigen Sie: $<,>$ ist genau dann ein reelles Skalarprodukt, wenn es eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$ gibt mit $A = B \cdot B^T$.

2. Aufgabe (2+1+2=5 Punkte) : Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. In der Definition des komplexen Skalarprodukts werde die Forderung $< x, x > \; > 0$ für $x \neq 0_V$ durch die Bedingung $< x, x > \; \geq 0$ für alle $x \in V$ ersetzt. Man erhält eine positiv semidefinite hermitesche Form $[\ ,\ ]$. Zeigen Sie:

a) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt auch für $[\ ,\ ]$.

b) $U := \{x \in V\, ;\ [x, x] = 0\}$ ist ein Unterraum von V .

c) Definieren Sie auf dem Quotientenraum V/U mit Hilfe von $[\ ,\ ]$ ein Skalarprodukt.

3. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Zeigen Sie, dass durch $<,>: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$< \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} > \ := \ (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_2 + \alpha_3)(\beta_2 + \beta_3) + (\alpha_3 + \alpha_1)(\beta_3 + \beta_1)$$

ein reelles Skalarprodukt definiert wird. Orthonormieren Sie mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt die Basis

$$x_1 \ := \ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \ := \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 \ := \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. dieses Skalarproduktes.

Bitte wenden!

4. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und U ein Unterraum von V mit $\dim U = \dim V - 1$. Zeigen Sie: Es gibt eine Linearform $f \in V^*$ mit $\mathrm{Kern}\ f = U$.

5. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien

$$U \ := \ \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \right\}$$

versehen mit dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ und $f \in L(U,U)$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \right) \ := \ \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die zu f adjungierte Abbildung f^{ad}.