Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

- Blatt 6 -

Abgabetermin: Donnerstag, 4.6.2009, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (2,5+2,5=5 Punkte) :

a) Es seien U ein Unterraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit Skalarprodukt $<,>$ und zugehöriger Norm $\| \ \|$. Zeigen Sie: Zu beliebigem $x \in V$ gibt es genau einen Vektor $y \in U$, der x "bestmöglich approximiert", d.h. für den gilt:

$$\|x-y\| \ = \ \min_{z \in U} \|x-z\| \, .$$

b) Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ - bzgl. des kanonischen Skalarprodukts - den Abstand

$$\operatorname{dist}(x,U) \ := \ \min_{z \in U} \|x-z\|$$

des Vektors $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Ebene $U := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \right\}$.

2. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Es seien V ein unitärer Vektorraum und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ein Orthonormalsystem in V. Zeigen Sie:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} | < x, b_j > |^2 \ \leq \ \|x\|^2$ für alle $x \in V$. (Besselsche Ungleichung)

(Hinweis: Betrachten Sie einen Ausdruck der Form $x - \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \, b_j$.)

b) In a) tritt genau dann für jedes $x \in V$ Gleichheit ein, wenn $\dim V = n$ gilt.

3. Aufgabe (2+3=5 Punkte) : Im $\mathbb{R}^n$ - mit dem Standardskalarprodukt - werde für Teilmengen M, N ein Abstand erklärt durch

$$d(M,N) \ := \ \inf \{ \, \|x-y\| \, ; \ x \in M \, , \ y \in N \, \} \, .$$

a) Zeigen Sie: Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ Unterräume, so gilt

$$d(x_0 + U, \, y_0 + V) \ = \ \|x_0 - y_0 - z_0\| \, ,$$

wobei z_0 die orthogonale Projektion von $x_0 - y_0$ auf $U+V$ ist, d.h. $x_0 - y_0 = z_0 + z_0'$ mit $z_0' \in (U+V)^\perp$ und $z_0 \in U+V$.

b) Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ den Abstand der Geraden

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$