Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

- Blatt 8 -

Abgabetermin: Donnerstag, 25.6.2009, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (1+1+1+2=5 Punkte) : Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zu jedem $a \in V\backslash\{0\}$ gibt es einen Endomorphismus $S_a : V \to V$, der definiert ist durch

$$S_a(x) \ := \ x - 2 < a, a >^{-1} < x, a > a \qquad \text{für alle } x \in V \ .$$

Sei $a \in V\backslash\{0\}$; zeigen Sie:

- ($S_a(x) = -x$, falls $x \in \mathbb{R}a$) und ($S_a(x) = x$, falls $x \in (\mathbb{R}a)^\perp$) .
- $< S_a(x), y > \ = \ < x, S_a(y) >$ für alle $x, y \in V$.
- $S_a \circ S_a = id_V$; der Endomorphismus S_a ist orthogonal .
- $\det S_a = -1$, falls V endlich-dimensional .

2. Aufgabe (3 Punkte) : Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $f \in L(V, V)$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

a) $V = \text{Kern} f \oplus \text{Bild} f$;

b) $f|_{f(V)}$ ist ein normaler Automorphismus von $f(V)$;

c) $\text{Kern } f = \text{Kern } (f \circ f)$.

3. Aufgabe (4 Punkte) : Es sei $A \in M(n, n)$ eine reguläre komplexe Matrix. Zeigen Sie: Es gibt unitäre Matrizen U_1 und U_2 , so dass gilt

$$U_1 \cdot A \cdot U_2 \ = \ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \ = \ (\alpha_k \cdot \delta_{k\ell}) \ ,$$

wobei $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2$ die Eigenwerte von $\bar{A}^T \cdot A$ sind .
(Hinweis: $\bar{A}^T \cdot A$ ist eine hermitesche Matrix mit positiven reellen Eigenwerten, die sich unitär diagonalisieren läßt.)

4. Aufgabe (3 Punkte) : Zeigen Sie, dass

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad q(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \ := \ x_1^2 - x_1 x_3 + x_2^2$$

eine quadratische Form ist, indem Sie die zugehörige symmetrische Bilinearform f bestimmen. Wie sieht die f darstellende symmetrische Matrix A aus bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$?