Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

- Blatt 9 -

Abgabetermin: Donnerstag, 2.7.2009, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf V. Zeigen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte Endomorphismen $g, h \in L(V, V)$ mit

$$f(x,y) \;=\; < x, g(y) > \;=\; < h(x), y > \quad \text{für alle} \quad x, y \in V \quad .$$

Ferner sind g und h genau dann selbstadjungiert, wenn f symmetrisch ist.

(Hinweis: Setze $g(b_k) := \sum_{\ell=1}^{n} f(b_\ell, b_k)\, b_\ell$ für $k = 1, \ldots, n$, wobei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ON-Basis von V ist.)

2. Aufgabe (4 Punkte) : Es sei $H \in M(n,n)$ eine hermitesche Matrix mit der Eigenschaft

$$\bar{x}^T H x \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle} \;\; x \in \mathbb{C}^n \;.$$

Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

a) Es existiert eine hermitesche Matrix $A \in M(n,n)$ mit $A^k = H$ und $\bar{x}^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$.

b) Berechnen Sie für $H = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$ eine hermitesche Matrix $A \in M(2,2)$ mit $A^2 = H$.

3. Aufgabe (3 Punkte) : Bestimmen Sie die Signatur der quadratischen Form

$$q(x) \;:=\; (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_3\, \alpha_4 \quad , \quad x \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;.$$

4. Aufgabe (4 Punkte) : Transformieren Sie die Hyperbel

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;;\; y = \frac{1}{x} \quad \text{für} \;\; x \neq 0 \right\} \quad .$$

auf Normalform.